

PROF. ING. STANISLAV KUBÍK, CSc.

PROF. ING. ZDENĚK KOTEK, CSc.

PROF. ING. DR. MIROSLAV ŠALAMON

České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechniky a informatiky
katedra výpočetní techniky
Práha 1 - Staré Město, Bráhová ul. 7
Síň č. 115 19

TEORIE REGULACE

I. Lineární regulační

Schváleno výnosem ministerstva školství
ze dne 17. května 1972 č. j. 25335/72 - 36
jako celostátní výukováho učebnice
pro elektrotechnické fakulty vysokých škol technických

PRAHA 1974

SNTL-NAKLADATELSTVÍ TECHNICKÉ LITERATURY

- [2.5] Salomon, M.: Podleší podmínky při výpočtu obrazu výstupní veličiny lineární dynamické soustavy. — Sl. O. 27, 1968; str. 401—404.
- [2.6] Tolstoroz, G. J.: Fourierova a Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955, 300 s.
- [2.7] Van der Pool, Bremer: Operational calculus based on the two-sided Laplace integral.
- [2.8] Wagner, K. W.: Über eine Formel von Heaviside zur Berechnung von Einbauschaltvorgängen. — Arch. f. El. 4, 1916: 159—165.
- [2.9] Wagner, K. W.: Operatorenrechnung und Laplacesche Transformation. Verlag J. A. Barth, Leipzig, 1950, 471 s.
- [2.10] Nixon, F. E.: Principles of automatic control. Praha: SNTL 1966, 317 s.

3. DYNAMICKE VLASTNOSTI REGULACÍNÍ OBVODŮ

Úkolem regulace je udržovat regulované veličiny v předepsaných podmínkách. Činnost regulace je dáná neustálým působením jedné části regulacího obvodu (regulatoru), na jeho druhou část (regulovanou soustavu). Toto působení se projevuje změnami jednotlivých veličin v regulovaném obvodu. Sledujeme-li nějakou veličinu v určitém místě regulacího obvodu, jsou tyto změny znamenitě časovými. Jestliže se jednotlivé veličiny



regulačního obvodu a časem nemění, říkame, že takový obvod je v *rovnováze* (*稳恒状态*). Změna vnitřních podmínek, v nichž se dany regulaci obvod nachází, způsobuje přechod tohoto obvodu z jednoho rovnovážného stavu do druhého stavu. Tyto změny jsou dáry změnami poruchových a řídících veličin. Našťáva příhodný jev, který v regulační technice nazýváme *regulačním pochodem*.

K výjekování vlastností regulací obvodu je výhodné používat tzv. blokových schémat. V těchto schématech je znázorněn určitý prvek nebo souhrn prvků nebo i celé zařízení (např. chemický reaktor) jediným obdélníkem. Na tento prvek nebo zařízení přichází z vnějšku určitý signál, což se nazývá vstupem. Sipka směřující k tomuto obdélníku. Tyto signály nazýváme vstupem daného prvku. Stejně tak vstupi daný prvek nebo zařízení na vnitřní prostředí v regulační technice nazýváme *regulačním pochodem*.

Obr. 14. Blokové schéma členu regulacího obvodu

Na obrázku 14 je znázorněno blokové schéma členu regulacího obvodu.

vých členů se nezmění, připojí-li se na výstupu daní členy. Vzájemné působení jednotlivých členů je uskutečňováno signálny, které se v průběhu regulačních poehod mění. Tyto změny mohou být spojité (mluvíme pak o *spojité regulaci*) nebo nespojité, a podle toho nazýváme takové regulace *nespojitémi*. Zvláštním druhem nespojitéch regulací jsou tzv. *regulační impulsové*, kterými se budeme podrobnejší zabývat v druhém díle této knihy. Známe-li vztahy mezi výstupními a vstupními signály jednotlivých členů, říkáme, že jsou tím určeny *dynamické* nebo *přenosové vlastnosti* técto členů.

Matematicky můžeme dynamické vlastnosti vyjádřit vztahem mezi výstupním a vstupním signálem daného člena

$$D_1\{x_1(t)\} = D_1\{z_1(t)\} \quad (61)$$

kde D_1 a D_2 jsou nějaké operátory použité na funkce $x_1(t)$ a $z_1(t)$, které představují vstupní a výstupní signál daného člena. Operátorem se nazývá v matematickém zákonu, kterým se k dané funkci určuje jiná funkce. Jinými slovy operátor představuje souhrn matematických i logických operací, kterými určíme k dané funkci drahon funkci. Protože každou funkci na vstupu člena regulačního obvodu odpovídá zcela určitá funkce na jeho výstupu, určuje operátor jednoznačně vztah mezi výstupem a vstupem, a je pro daný člen jediný.

Operátor D se nazývá *lineárním*, jestliže má tyto základní vlastnosti

$$\begin{aligned} D\{Z x_1(t)\} &= Z D\{x_1(t)\} \\ D\{E x_1(t)\} &= E \cdot D\{x_1(t)\} \end{aligned} \quad (62)$$

Přemírnovice znamená, že plati *tzv. princip superpozice*. Ten zřejmě umožňuje určit například průběh výstupního signálu jako součet průběhu, které jsou dílčími členymi vztahu (61). Každé z těchto dílčích členů se zpravidla snadněji stanoví než výsledný průběh. Z matematického výhledu je to výhodou, že také derivace a integrál jsou lineární operátory vzhledem k funkci, na něž jsou použity. Operátory D_1 a D_2 v rovnici (61) mohou tedy také představovat lineární diferenciální rovnice.

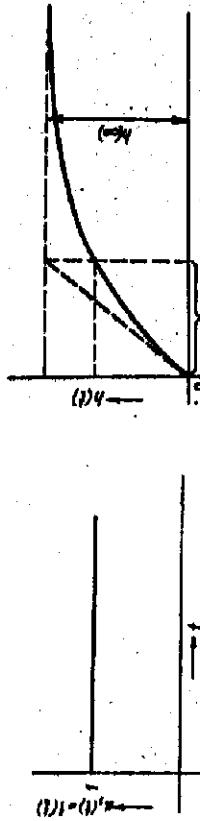
Regulační popsané lineární diferenciální rovnici nazýváme lineárními regulacemi. V lineárních regulačních obvodech nesmí jejich jednotlivé parametry, které určují konstanty diferenciální rovnice, záviset na veličinách obvodu, které jsou funkce času, a ani na jejich derivacích. U elektrických obvodů to například znamená, že odpory, induktivnosti a kapacity nesmějí záviset na proudu nebo na napětí. Jednotlivé parametry mohou však být funkci času. Vlastnosti takového obvodu jsou pak popsány lineárními diferenciálními rovnicemi s časově proměnnými konstantami.

Nejvíce propracovány jsou metody řešení systémů popsaných lineárními diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty. Tyto systémy mají některé zvláštnosti. Ve výstupním signálu se u nich nemohou objevit funkcionální vlastnosti. Tato funkce je znázorněna na obr. 15. Jestliže je daný člen nebo systém v okamžiku přivedení jednotkového skoku v klidovém stavu, nazýváme jeho odzvou

členky o kmototech, které nebyly obsaženy ve spektru vstupního signálu. Právodem signálu lineárním členem nebo systémem se mění jen amplituda a fáze jednotlivých složek. U systému s časově proměnnými parametry se mohou ve výstupním signálu objevit i složky s kmotou, které nejsou obsaženy v signálu vstupním. Tim se tyto systémy podobají nelineárním systémům. Operátory D_1 a D_2 mají pro lineární systémy s konstantními parametry tvar

$$D = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} \quad (63)$$

Nelineárníma nazýváme libovolný operátor, pro který neplatí princip superpozice. Dynamické vlastnosti nelineárního systému jsou popsány nelineárními diferenciálními rovnicemi. V tom případě mluvíme v regulatérní technice o nelineárních funkciích.



Obr. 15. Frecuency characteristic
of a linear system

Obr. 16. Frecuency characteristic
of a non-linear system

Známé-li diferenciální rovnice jednotlivých členů, je možné určit vlastnosti daného systému. Použití diferenciálních rovnic nedává však jednoduché způsoby praktického řešení regulačních problémů. Proto používáme metod, které vycházejí z platnosti principu superpozice a díky jednoduchému způsobu analýzy i syntézy regulačních obvodů. Princip superpozice umožňuje zvolit určité základní typické vstupní signály a k nim určit odpovídající průběhy signálů výstupních. Průběh výstupního signálu určího člena reho systému, odpovídající určitému signálu vstupnímu, nazýváme *odzvou*.

Jedním základním typickým vstupním signálem je tzv. jednotkový skok. Je to funkce definovaná vztahem

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases} \quad (64)$$

Tato funkce je znázorněna na obr. 15. Jestliže je daný člen nebo systém v okamžiku přivedení jednotkového skoku v klidovém stavu, nazýváme jeho odzvou

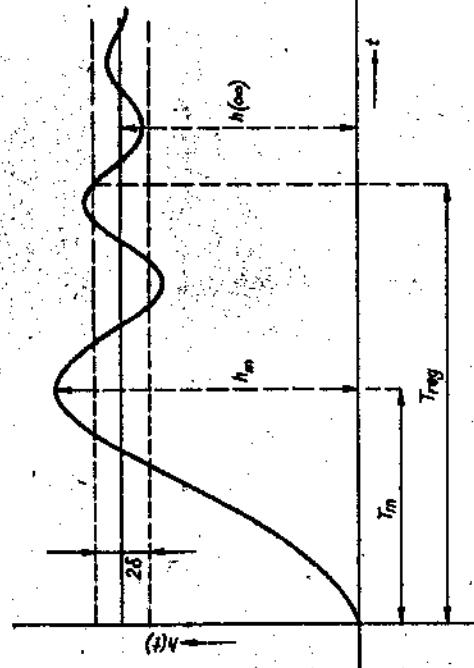
(průměrk výstupního signálu) přechodovou funkci. Její grafické znázornění nazýváme **přechodovou charakteristikou**. Značíme ji $h(t)$. Její-li například dynamické vlastnosti uvažovaného členu dány diferenční rovnicí

$$T_2 \ddot{x}_2 + x_2 = x_1 \quad (65)$$

je jeho přechodová charakteristika na obr. 16.

Jsou-li dynamické vlastnosti prvků dány diferenčními rovnicemi vyššího řádu, může mít přechodová charakteristika kmitavý průběh jako na obr. 17. Takovou přechodovou charakteristikou je možno ohlašovat následujícimi veličinami: ustálenu hodnotou $h(\infty)$ definovanou vztahem

$$h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$$



Obr. 17. Kmitavý průběh přechodové charakteristiky

Kmitavost průběhu se nazývá charakterizující jeho první amplitudou h_m nebo tzv. **přeregulováním** σ , vyjadřovaným v procentech ustálého stavu podle vztahu

$$\sigma \% = \frac{h_m - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100 \% \quad (66)$$

Toto přeregulování bývá předepsáno podle povahy regulačního procesu. Tak například v měřicí technice bývá přeregulování řádově 1 %, v servomechanismech se připouští dokonce i 25 %. Pro posouzení rychlosti regulačního vztahu tuzv. dobu regulace T_{reg} která je definována jako doba, za kterou trvale klesne rozdíl mezi hodnotou přechodové charakteristiky a hodnotou ustálého stavu pod smíšenou hodnotou θ , tj.

$$|h(T_{reg}) - h(\infty)| \leq \delta$$

Někdy definujeme rychlosť regulace dobou T_s , kdy nastává první maximum přechodného děje, tj. platí

$$h(T_s) = h_m$$

Aperiodický průběh přechodové charakteristiky je na obr. 18. Charakteristickými vlastnostmi jsou zde kromě hodnoty ustálého stavu $h(\infty)$, taz. doba náhlahu T_a , doba přitahu T_p a doba přechodu T_s . Doba náhlahu T_a je



Obr. 18. Aperiodický průběh přechodové charakteristiky



Obr. 19. Přechodová charakteristika
a doprovodný zpoždění

definována úsekem, který vymezí tečnu sestrojenou v inflexním bodě přechodové charakteristiky podle obr. 18. Doba přitahu T_p je doba od okamžiku časové změny přechodové charakteristiky do průsečku tečny vedené v inflexním bodě s osou času. Souběžně s dobou přitahu a doby náhlahu je tuzv. doba přechodu $T_s = T_a + T_p$.

Na obr. 19 je přechodová charakteristika s tzv. **doprovodným zpožděním** T_d . Je to doba od okamžiku přiložení vstupního skokového signálu až do okamžiku, kdy se začne projevovat změna výstupního signálu. Sestaváme se s ním při regulačním průtoku a soustav, kde se dopravuje nějaký materiál.

Kromě uvedených charakteristiky význam posuzovat také podle celkového přiblžného počtu

je možno regulační počet postužovat také podle

$|h(T_{reg}) - h(\infty)| \leq \delta$

vá charakteristiky. K tomu se používají různých integrálních kritérií. Nejdříve si z nich je dán vztahem

$$\int_0^{\infty} e^t dt = \frac{X_1(j\omega)}{X_2(j\omega)} = F(j\omega) \quad (71)$$

nazývané jej frekvenčním přenosem. Platí-li diferenciální rovnice (65), dostaneme k určení frekvenčního přenosu za x_1 a x_2 vztahy (68) a (70) a dostaneme frekvenční přenos příslušného kritéria.

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + T(j\omega)} \quad (72)$$

Frekvenční přenos je obecně komplexní veličina. Znázorníme jej v komplexní rovině, dostaneme tzv. frekvenční charakteristiku. Pro přenos (72) je na obr. 20. Je to geometrické místo konecích bodů vektoru výstupního signálu pro různé úhlové kmitočty a ustálené stav, je-li na vstupu jednotkový sinusový signál.

Tato plocha je jen v kladné oblasti a při trvalých kmitacích nebude mít nulovou hodnotu. Další předností tohoto kritéria je, že velké odchylky se znadně uplatní. Jako měřítka kvality regulačních pochodů se používá i jiných kritérií, například

$$\int |te^t| dt; \int |e^t| dt; \int t^2 e^t dt \text{ atd.}$$

Velmi dležitě je také kritérium uváděné pod názvem ITAE, které je definováno integrálem

$$\int |te^t| dt$$

Toto kritérium oceňuje kromě velikosti odchylky také dobu trvání přechodného jevu.

Jiným základním vstupním signálem, kterého používáme k výsledování vlastností lineárních systémů v ustáleném stavu, je sinusový průběh. Vzhledem k lineárnosti uvažovaného obvodu jsou pak výstupní signály také sinusové a mění se jen jejich amplituda a fáze. Pro řešení ustálených stavů používáme tzv. symbolicko-komplexní metody početní [3.4]. Při ní každému sinusovému vstupnímu signálu

$$x_1 = X_{10} \sin \omega t \quad (67)$$

$$X_1(j\omega) = X_{10} e^{j\omega t} \quad (68)$$

Výstupnímu signálu s obecně jinou amplitudou X_{20} a fází φ

$x_2 = X_{20} \sin(\omega t + \varphi) \quad (69)$

$X_2(j\omega) = X_{20} e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (70)$

odpovídá vektor

Obr. 21. Rokitzeni poloh a nul v komplexní rovině

Stanovinek p. 2. technické vektory

$$\frac{X_1(j\omega)}{X_2(j\omega)} = F(j\omega) \quad (71)$$

nazývané jej frekvenčním přenosem. Platí-li diferenciální rovnice (65), dostaneme k určení frekvenčního přenosu za x_1 a x_2 vztahy (68) a (70) a dostaneme frekvenční přenos příslušného kritéria.

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + T(j\omega)} \quad (72)$$

Frekvenční přenos je obecně komplexní veličina. Znázorníme jej v komplexní rovině, dostaneme tzv. frekvenční charakteristiku. Pro přenos (72) je na obr. 20. Je to geometrické místo konecích bodů vektoru výstupního signálu pro různé úhlové kmitočty a ustálené stav, je-li na vstupu jednotkový sinusový signál.

K popisu dynamických vlastností používáme také tzv. obrazceho přenosu. Je to počet obrazu výstupního signálu, k obrazu signálu vstupního, jestliže určovaný člen předpokládáme v base $t = 0$ v ustáleném stavu, tj.

$$F(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{M(p)}{N(p)} \quad (73)$$

Obrázek zde rozumíme ve smyslu Laplaceovy transformace, jak jsme ji probrali v 2. kapitole. Jestliže je systém popsán lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty, je přenos (73) racionalní lomenou funkcí. Mnohočlen $N(p)$ odpovídá charakteristické rovnici a její koeficienty jsou polý přenosu $F(p)$. Korespondující mnohočlen $M(p) = 0$ určuje nulý přenosu (73). Jak známo z matematiky, koeficienty charakteristické rovnice určují charakter časového průběhu a motion být obecně komplexní. Znázorníme-li je v rovině p podle obr. 21, určuje jejich rozložení charakter přechodného děje. Odezva je však dána také integrálními konstantami. K jejich určení je nutno znát i nuly, které jsou na obr. 21 ozna-

čeny kroužky. Rozložení nul a pólů daného píenou v komplexní rovině určuje tedy klasovou odezvu. Pro řešení regulačních problémů byla využívána zvláštní metoda tzv. geometrického místa kořenů, kterou podrobně probereme v 9. kapitole.

Dynamiku daného systému je možno popsat také Volterovou integrální rovnicí. K tomu přepíšme výraz (73) na tvar

$$N(p) X_2(p) := M(p) X_1(p) \quad (74)$$

a mnohočlen $N(p)$ vyjádříme jako součet dvou mnohočlenů

$$N(p) = N_1(p) + N_2(p) \quad (75)$$

přičemž stupň mnohočlenu $N_1(p)$ nerovnle ménší než stupeň mnohočlenu $N_2(p)$ a $M(p)$. Rovnice (74) pak můžeme napsat ve tvaru

$$X_2(p) + W(p) X_1(p) = W_1(p) X_1(p) \quad (76)$$

kde

$$W(p) = \frac{N_2(p)}{N_1(p)}$$

$$W_1(p) = \frac{M(p)}{N_1(p)}$$

Použijeme-li věty o konvoluci uvedenou v 2. kapitole, dostaneme k rovnici (76) odpovídající rovnice druhého typu. Funkce $f_1(t)$ je dána vztahem

$$x_2(t) + \int_0^t w(t-\tau) x_2(\tau) d\tau = f_1(t) \quad (77)$$

což je Volterova rovnice druhého typu. Funkce $f_1(t)$ je dána vztahem

$$f_1(t) = \int_0^t w_1(t-\tau) x_1(\tau) d\tau$$

a je to známá funkce, protože $x_1(t)$ je známé.

Využití dynamiky systému Volterovou rovnicí (77) je výhodné pro stanovení průběhu $x_2(t)$, protože odpadá nutnost určovat kořeny mnohočlenu $M(p)$ a $N(p)$, což je úkol obtížný zvláště u přenosu vyššího stupně. Integrální rovnice (77) může být řešena s použitím některých přibližných metod.

Při řešení regulačních problémů se využívají charakteristikami vycházejícími často z této rovnice, které platí pro tzv. ideální filtry. Aby se nějakým členem přeneseného signálu bez zkreslení za určitou dobu T_a musí plnit

$$x_2(t) = K x_1(t - T_a) \quad (78)$$

kde $x_1(t)$ je vstupní signál,

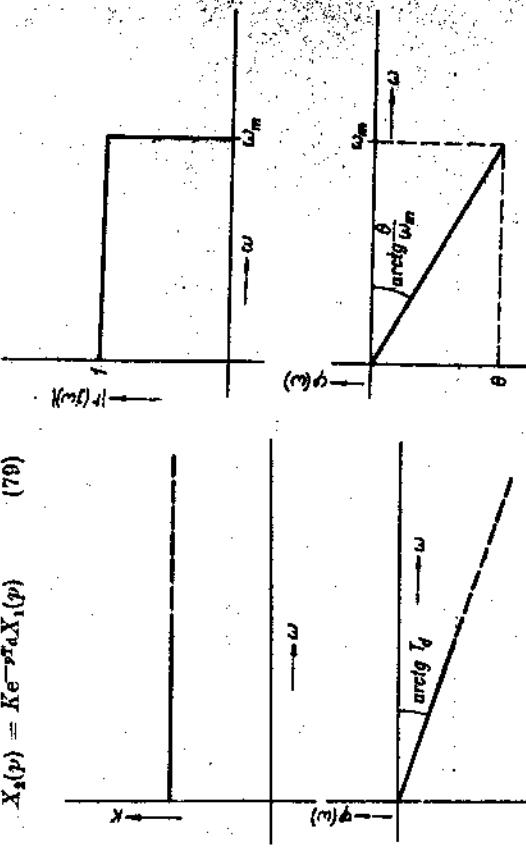
$x_2(t)$ výstupní signál,

K konstanta, která má význam zaslehlosti,

T_a doba zkreslení signálu (dopravní zpoždění).

Použijeme-li Laplaceovou transformaci, dostaneme k rovnici (78) rovnici v obrazech

$$X_2(p) = K e^{-p T_a} X_1(p) \quad (79)$$



Obr. 21. Frekvenční charakteristiky dle (79), který propojuje signály bez zkreslení „ideálního filtru“

Podle definice přenosu $F(p)$ jako poměru obrazu výstupního a vstupního signálu dostaneme

$$F(p) = K e^{-p T_a} \quad (80)$$

Tomuto ohrazovému přenosu odpovídá frekvenční přenos

$$F(j\omega) = K e^{-j\omega T_a} \quad (81)$$

Poměr amplitud je dán velikostí K a pro fázii platí $\varphi(j\omega) = -\omega T_a$. Průběh amplitudy a fáze takového fiktivního člena je na obr. 22. Aby se signál přenášel bez zkreslení, musí mít člen konstantní amplitudovou charakteristikou v celém kmitočtovém pásu a fázi, která se lineárně mění s kmitočtem.

Skladací systém má však charakteristiku, která se liší od charakteristiky předpokládané na obr. 22. Abychom mohli analyticky vyjádřit významné souvislosti mezi frekvenční charakteristikou a časovým průběhem, zavádime pojmen

ideální filtr. Kozuříme jím takový člen, jehož amplitudová a fázová charakteristika by byly podle obr. 23 a jsou dány následujícími vztahy

$$|F(j\omega)| = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq \omega \leq \omega_m \\ 0 & \text{pro } \omega > \omega_m \end{cases} \quad (82)$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\Theta}{\omega_m} \cdot \omega \quad \text{pro } 0 \leq \omega \leq \omega_m \quad (83)$$

Tento filtr rovněž proponuje signály až do nějakého mezního úhlového kmitočtu ω_m . Tento rozsah kmitočtů nazýváme *propustností*. Je možno uložit vztah mezi pásmem propustnosti a tvarem časového průběhu výstupního signálu. Abychom mohli určit přechodovou charakteristiku ideálního filtru, uvažujeme na vstupu jednotkový skokový signál, který vyjádříme s použitím Fourierovy transformace

$$x_1(t) = 1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \quad (84)$$

To odpovídá náhradě jednotkového skoku s jinou časovou složkou a nekončeným spektrem sinusových harmonických s amplitudami $\frac{dc\omega}{\pi\omega}$.

Jestliže je frekvenční přenos daného prvku $F(j\omega)$, bude každé harmonického vstupu $\frac{d\omega}{\pi\omega} \sin \omega t$ odpovídat na výstupu příslušná harmonická $|F(j\omega)| \frac{d\omega}{\pi\omega} \sin [\omega t + \varphi(\omega)]$.

Jednotkovému skoku na vstupu bude tedy na výstupu odpovídat průběh $x_2(t) = h(t) = \frac{|F(0)|}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|F(j\omega)|}{\omega} \sin [\omega t + \varphi(\omega)] d\omega \quad (85)$

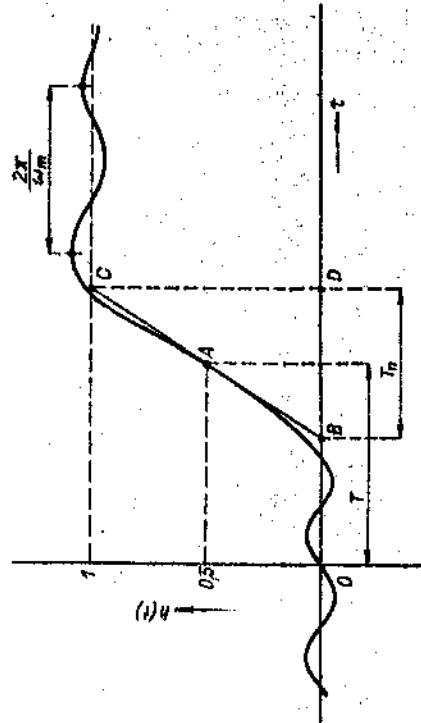
Použijeme-li vztah (85) na ideální filtr, dostaneme

$$\begin{aligned} x_2(t) &= h(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_m} \frac{\sin \left[\omega t - \frac{\Theta}{\omega_m} - \omega \right]}{\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{Si} \omega_m (t - T) \right] \end{aligned} \quad (86)$$

takže je přechodová funkce ideálního filtru

$T = \frac{\Theta}{\omega_m}$ je úhlový boubínkovitý charakteristiky, a je to doba zpoždění vyznamenaná na obr. 24. Je to doba, za kterou přechodová charakteristika $h(t)$ dosáhne hodnoty $h(T) = 0,5$. Si je integrál sinus definovaný vztahem

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin y}{y} dy$$



Obr. 24. Přechodová charakteristika „ideálního filtru“

realizovat. Zkreslení čela výstupního průběhu je dáno konečnou šířkou pásmu prospustnosti. Sestrojme-li v bodě A na obr. 24 tečnu, vytne k něj úsek T , daný body B a C, pro který platí

$$T_n = \frac{1}{\left(\frac{dh}{dt} \right)_{t=T}} \quad (87)$$

Abychom určili toto T_n , určíme derivaci dh/dt přechodové charakteristiky:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_m} \cos [\omega(t - T)] d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega_m (t - T)}{t - T} \end{aligned} \quad (88)$$

KONTROLNÍ OTÁZKY KE 3. KAPITOLE

$$\left(\frac{dt}{dt} \right)_{t \rightarrow T} = \lim_{t \rightarrow T} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega_m(t-T)}{t-T} = \frac{\omega_m}{\pi} \quad (89)$$

Platí tedy, že doba nábehu T_s

$$T_s = \frac{\pi}{\omega_m} \quad (90)$$

Vidíme, že rychlosť, s jakou narůstá čelo odrezu, je neplímo úměrná šířce pásma propustnosti daného členu. To nám umožňuje přímo podle frekvenčních charakteristik očíslovat rychlosť odrezu. Pro frekvenční charakteristiky skutečných členů je pláno propustnosti definováno řílkovým kmitottem ω_m , při kterém poklesne amplitudová frekvenční charakteristika o 3 dB.

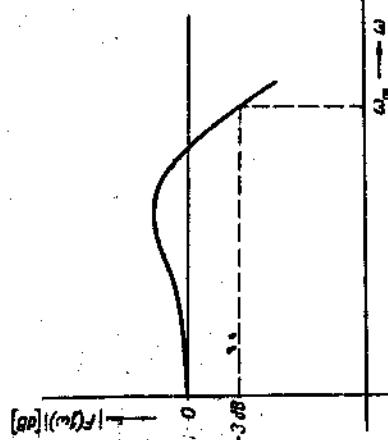
Jak je vidět na obr. 25, čím je pláno propustnosti širší, tím je reakce systému rychlejší. Přišla široká pláno propustnosti nemá však výhodné, protože zmenšuje filtrační učinek daného členu. Výše uvedené základní úvahy dívaly jí základní teoretické vztahy mezi frekvenční charakteristikou a přechodovou charakteristikou. Pohledování se hudemene zahýbat vztahy mezi přenosy, frekvenčními charakteristikami a přechodovými charakteristikami v dalších kapitolách.

Uvedené způsoby popisu dynamických vlastností obvodu jsou z teoretického hlediska rovnocenné, protože plně definují vlastnosti obvodu. Nejsou však rovnocenné z hlediska jejich praktického použití. Tak například popis dynamických vlastností diferenciální rovnici může poměrně věrně vystihnout vlastnosti systému. Používání diferenciálních rovnic, které je klasickým způsobem řešení regulačních obvodů, však při složitých obvodech působí již znakně obtížky, a není možno jednoduše provádět syntézu regulačních obvodů. Přechodová charakteristika se poměrně snadno snímá experimentálně. Znázorňuje přechodové charakteristiky jednotlivých členů, nemusí ještě určovat jednotlivých způsobem přechodovou charakteristikou obvodu složeného z takových členů. Jako nejdůlnější metody řešení regulačních obvodů se dnes používají především obrazových přenosů nebo frekvenčních charakteristik.

1. Co je to rozmazaný (blidový) stav?
2. Co je to regulatér pochod?
3. Co jsou to dynamické, přenosové vlastnosti?
4. Co je to operátor?
5. Jaké jsou základní vlastnosti lineárních a nelineárních regulací?
6. Co je to odzera?
7. Co je to přechodová funkce a přechodová charakteristika?
8. Co je to přeregulování, doba nábehu, doba průtahu, doba dopravního zpoždění?
9. Jaké znáte kritéria kvality regulace?
10. Co je to frekvenční přenos?
11. Co je to obrazový přenos?
12. Kdy je vhodná Volterraova integrální rovnice k popisu dynamických vlastností?
13. Jaký průběh musí mít frekvenční charakteristika členu, který přenáší signál bez zkreslení?
14. Jaká je definice ideálního filtru?
15. Co je to pásmo propustnosti a jak souvisí s přechodovou charakteristikou?

LITERATURA KE 3. KAPITOLE

- [3.1] Petřbenec, A. A., Dudykin, A. D., Manover, A. P., Mirojubor, N. N.: Teorijsko-českijje osnovy svjazi i upravlenija. Moskva, Gos. izd. fiz.-mat. lit., 1963
- [3.2] James, H. M., Nichols, M. B., Phillips, R. S.: Theory of servomechanism. New York—London, Mass. Inst. of Technol., Radiation Laboratory Series, Vol. 25, 1947
- [3.3] Oppelt, W.: Příručka regulátérní techniky. Praha: SNTL, 1958
- [3.4] Trnka, Z.: Teoretické elektrotechnika I. Praha: SNTL, 1954



Obr. 25. Definice pásmu propustnosti

4. SESTAVOVÁNÍ ROVNIC REGULAČNÍCH OBVODŮ

kde T je kinetická energie systému,

Q_1, Q_2, \dots, Q_n jsou zobecnění sily působící na systém a

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} - zobecněná rychlosť jejich souřadnice.$$

Jestliže mají sily působící na systém potenciál V , tj. závisí jen na zobecněných souřadnicích systému, májí Langrangeovy rovnice tvar

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial T}{\partial x_2} &= -\frac{\partial V}{\partial x_2} \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

V předchozí kapitole byly uvedeny způsoby popisu vlastnosti regulačních obvodů. Tam byly definovány různé přenosy a charakteristiky, kterých k tomu používáme. Jejich základem jsou v podstatě diferenciální rovnice popisující dynamické vlastnosti jednotlivých členů nebo systému.

V teoretické mechanice byla vytvořena obecná metodika sestavování popisových rovnic mechanických soustav *Lagrangeovou rovinicí* [4.1]. Bylo uvedeno, že k určení stavu mechanické soustavy lze kromě kartézských souřadnic použít také nezávislých parametrů, jejichž počet odpovídá počtu stupňů volnosti soustavy. Nezávislé parametry (určující polohu mechanických soustav v prostoru) se nazývají jejich zobecněními a označíme je x_i . Vyber těchto zobecněných souřadnic je do značné míry libovolny. Provádí se tak, aby dynamické zákony pohybu byly co nejjednodušší popsány. Tato metoda platí i pro regulační obvody, které můžeme z tohoto hlediska považovat za zvláštní případ mechanické soustavy. Zobecnění souřadnice jsou v regulačním obvodu různé fyzikální veličiny a jejich derivace (teploty, tlaky, výchylky, elektrická napětí a proudy atd.). Vybrájí se tak, aby pro rovnovážný stav systém platilo

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

Lagrangeovy rovnice druhého druhu, které popisují dynamické vlastnosti daného systému, mají (jak známo z teoretické mechaniky) tento tvar

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= Q_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial T}{\partial x_2} &= Q_2 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n} - \frac{\partial T}{\partial x_n} &= Q_n \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial R}{\partial x_1} + f_1(t) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial T}{\partial x_2} &= -\frac{\partial V}{\partial x_2} - \frac{\partial R}{\partial x_2} + f_2(t) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n} - \frac{\partial T}{\partial x_n} &= -\frac{\partial V}{\partial x_n} - \frac{\partial R}{\partial x_n} + f_n(t) \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Jestliže uvažujeme malé změny souřadnic systému od rovnovážného stavu, můžeme zanedbat výšší stupně souřadnic a jejich derivaty a uvažovat kinetické

kou energii systému jako pozitivně definovanou kladou formu vzhledem k x_i a kladnými koeficienty $a_{ij} = \text{konst}$. Pak $\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$ a pohybové rovnice pro malé výchylky kolem rovnovážného stavu budou

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n} + \frac{\partial V}{\partial x_n} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

V soustavě rovnic (95) předpokládáme, že na systém nepůsobí vnější síly $f_i(t)$. Jestliže působí vnější síly $f_i(t)$, ale jejich účinkem se výchylky soufadic nervítí tak, aby již nebylo možno použít přibližného vyjádření kinetické a potenciální energie, přejdou Lagrangeovy rovnice (94) v soustavu lineárních diferenciálních rovnic druhého rádu s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned} a_{11}(p)x_1 + a_{12}(p)x_2 + \dots + a_{1n}(p)x_n &= f_1(t) \\ a_{21}(p)x_1 + a_{22}(p)x_2 + \dots + a_{2n}(p)x_n &= f_2(t) \\ \vdots &\vdots \\ a_{n1}(p)x_1 + a_{n2}(p)x_2 + \dots + a_{nn}(p)x_n &= f_n(t) \end{aligned} \quad (96)$$

kde

$$a_{ij}(p) = A_{ij}p^2 + B_{ij}p + C_{ij}$$

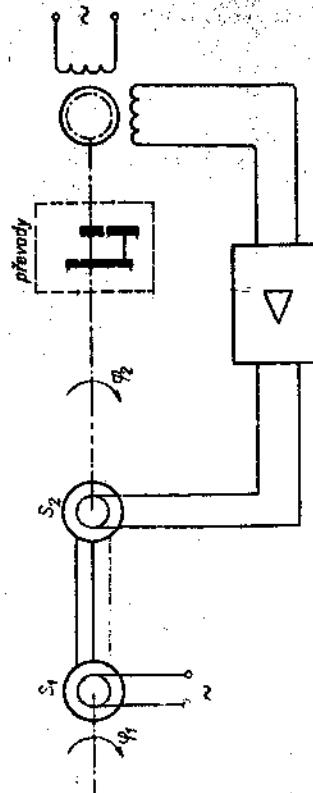
$$p \equiv \frac{d}{dt}$$

A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} jsou konstanty,

$f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ jsou funkce času.

I když uvedený postup je obecným způsobem sestavení pohybových rovnic a má velký význam teoretický, postupujeme v praxi tak, že sestavujeme odděleně rovnice pro jednotlivé členy (prvky) systému na základě fyzikálních zákonů, kterými se hřadí pochody probíhající v jednotlivých prvech. Jeou to především zákon o zachování hmoty, zákon o zachování energie, Newtonovy zákony, D'Alembertův princip, Kirchhoffovy zákony pro elektrické obvody a další základní zákony fyziky. Dostaneme tak zpravidla lineární diferenciální rovnice.

Jako příklad uvážíme servomechanismus podle obr. 26. K sestavení diferenciální rovnice použijeme D'Alembertův princip pro pohyb výstupního hřidla. Podle něj musí být v každém časovém okamžiku součet všech momentů působících na výstupním hřidle roven nule. Působi zde jednak hnací moment M_m vyrůstající servomotorem, který je určen charakteristikami servomotoru. Pro použití střídavý dvoufázový servomotor závisí moment na napětí fázicí fáze. Ta je napájena ze zesilovače, který zesiluje napětí regulaci odchylyky $\varphi = \varphi_t - \varphi_s$, odchylyka je výhodouem selsyny S_1 a S_2 v multikorém zapojení. Můžeme tedy říci, že hnací moment na výstupním hřidle je nějakou obecnou funkcí regulaci odchylyky φ , takže $M_m = M_m(\varphi)$. Tato funkce nebude jednoduchá úměrnost ($M_m = K\varphi$), ale bude zahrnovat různé linearity, jako na-



Obr. 26. Schéma servomechanismu

příklad vůli v převodech, nasycení v zesilovači, necitlivost zesilovače nebo selsynu, lineární (sinusový) přenos selsynu apod. To, že moment servomotoru klesá a roste s rychlosťí otáčení, vyjadříme přiběhem základové charakteristiky na výstupním hřidle $\frac{d\varphi}{dt} = \ddot{\varphi}$. Kromě toho bude tato charakteristika také zahrnovat nelineární tření, takže souhrnně napišeme $M_T = M_T(\varphi, \ddot{\varphi})$. Kromě toho je na výstupu moment setrváčnosti J , ve kterém je zahrnut i moment setrváčnosti rotoru servomotoru přeportený na výstupní hřidle. Rovnost těchto momentů dá rovnici

$$M_m(\varphi) = J\ddot{\varphi}_t + M_T(\varphi_t) \quad (97)$$

Po zavedení vztahu $\varphi := \varphi_t - \varphi_s$ a dělení celé rovnice momentem setrváčnosti J , dostaneme

$$\frac{1}{J} M_m(\varphi) := \ddot{\varphi}_t - \ddot{\varphi} + \frac{1}{J} M_T(\varphi_t - \varphi) \quad (98)$$

Jednice hledáme odstavu na skokovou funkci podle rovnice

$$\varphi_1 = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ \varphi_{T_0} & \text{pro } t \geq 0 \end{cases} \quad (99)$$

platí $\dot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_1 = 0$ a je-li funkce $M_T(\varphi_2)$ funkci lichou, tj. platí $M_T(-\varphi_3) = -M_T(\varphi_2)$, dostaneme rovnici (98) ve tvaru

$$0 = \ddot{\varphi} + g(\varphi) + f(\varphi) = 0 \quad (100)$$

kde $g(\varphi) = \frac{1}{J} M_T(\varphi)$ a $f(\varphi) = -\frac{1}{J} M_{\infty}(\varphi)$ jsou nelineární funkce respektive nelinearity na výstupním hřídeli, v ovládaci i sifmači odchylky.

V druhém případě uvažujeme obecný motor, kterým může být parní nebo vodní turbina, kompresor, spalovací motor nebo parní stroj. Připusťme pro praktický výpočet, že takový motor je možno považovat za systém s jedním stupněm volnosti. Pak lze takové zařízení popsat s použitím jediného parametru, v tomto případě rychlosti otáčení (úhlovou rychlosť) hřídele motoru. Na základě D'Alembertova principu platí pro hřídel motoru rovnice

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_s - M_r \quad (101)$$

kde J je moment setrvačnosti všech rotujících částí přepočtený na hřídel motoru,

ω úhlová rychlosť hřídele,

M_s hnedci moment sil působících na rotor,

M_r zatížovací moment větvené momentu tříení.

Hnedci moment M_s závisí na energii přiváděné motorem, a je tedy funkce polohy regulačního orgánu x a funkci úhlové rychlosti hřídele motoru. Zatížovací moment M_r závisí na rychlosti ω a mění se obecně s časem t . Pak můžeme rovnici (101) přepsat na tvar

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_h(x, \omega) - M_r(\omega, t) \quad (102)$$

což je nelineární diferenciální rovnice.

Jestliže jde o *stabilní systém*, dostaneme použitím základních fyzikálních zákonů soustavy několika nelineárních diferenciálních rovnic. Protože neznáme metody, jak řešit takový složitý systém s mnoha nelineárnitami, snažíme se samozřejmě celý problém zjednodušit. Protože jsou důkladně propracovány metody řešení vycházející z předpokladu lineárnosti systému, je dálším dležitém krokem při sestavování rovnice linearizace daných rovnic. Pak můžeme totiž použít přenosu a charakteristik, jak jsme je uvedli ve 3. kapitole a jak se

jimi budeme ještě podrobnejší zabývat v následujících kapitolách. V mnoha případech však lineární diferenciální rovnice nemohou vystihnout charakteristiku daného systému. Nelneární parametry totiž někdy způsobují jery, které z teorie lineárních systémů nevyplývají, a nelze je tedy ani lineární teorii využít. Pak je nutno řešit celý systém jako nelneární problém. Tim se budeme zabývat ve druhém dílu této knihy.

Linearizace se provádí různými způsoby. Uvedeme tři nejčastěji užívané:

1. Linearizace přenosu jednoduchých prvků

Tento způsob je velmi rozšířen pro případy, kdy jde o poměrně jednoduché závislosti mezi jednoduchými veličinami. Na základě zkusebnosti určíme pravou oblasti a v nich předpokládáme lineární závislost mezi výstupem a vstupem daného článku. Je to náhrada nelneární charakteristiky technou v pracovním bodě. Příkladem tohoto vlastnosti používaného postupu je sestavení rovnic servomechanismu. Moment tření na výstupním hřídeli bereme dle rychlosti, tj. $M_T = B\dot{\varphi}_2$ — tzv. viskózni tlumení. Moment motoru přepočtemy na výstupní hřídel uvažujeme přímo úměrný regulární odchylce φ , tj. $M_m = K\varphi$.

Pak základní rovnice (97) je lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$K\ddot{\varphi} = J\ddot{\varphi}_2 + B\dot{\varphi}_2 \quad (103)$$

která po dosazení vztahu $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ a zavedení bezrozměrných parametrů

$$\alpha = \frac{B}{2\sqrt{KJ}} \quad \omega_0^2 = \frac{K}{J} \quad (104)$$

dá rovnici

$$\ddot{\varphi} + 2\alpha\omega_0\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \ddot{\varphi}_1 + 2\alpha\dot{\varphi}_1 \quad (105)$$

kde K je zesilení, J součinitel viskózniho tlumení, α je tzv. součinitel tlumení, ω_0 vlastní úhlový krmitočet systému.

Tohoto postupu používáme také při odvození rovnic *dvojúzového synchronního servomotoru*, jehož zjednodušení schéma je na obr. 27. Stator má dvě vnitřní vzájemně prostoru posunutá o 90° . Rotor je hincovitý, hliníkový. Statorová vlnuta jsou napojena prony vzdělém elektricky posunutými o 90° , což je na obr. 27 znázorněno zapojením kondenzátoru. Momentové charakteristiky tohoto servomotoru jsou podle obr. 28a pro různé hodnoty

vstupního napětí U_1 . Protože mohou být v dceři kružné oblasti využívány jako lineární, nahrazují se charakteristikami podle obr. 28. Pak ale můžeme závislost momentu motoru M na silové rychlosti ω hřídele vyjádřit jednoduše

$$M = M_1 - B\omega \quad (106)$$

kde M_1 je moment motoru při $\omega = 0$. Při stejných vzdílenostech charakteristik je první úměrný napětí U_1 , tj. platí

$$U_1 = KU_1 \quad (107)$$

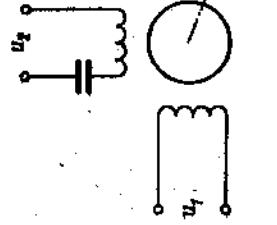
Konstanta K je dána vztahem

$$K = \frac{\Delta M_1}{\Delta U_1}$$

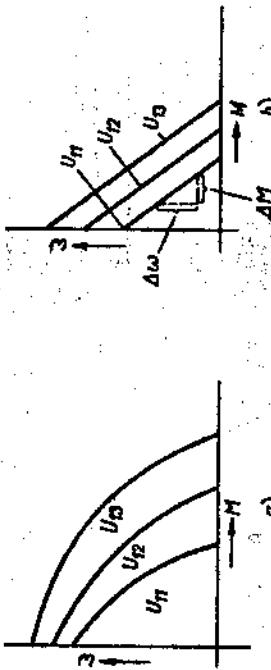
a lze j. určit přímo z charakteristik na obr. 28, protože ΔM_1 je příslušek momentu odpovídajícího příslušnému napětí

$$\Delta U_1 = U_{12} - U_{11}$$

Obr. 27. Schéma
střídavého servomotoru



Obr. 28. Momentové charakteristiky střídavého servomotoru



Obr. 28. Momentové charakteristiky střídavého servomotoru

B je také konstanta, kterou lze určit přímo z charakteristik podle vztahu

$$B = \left| \frac{\Delta M}{\Delta \omega} \right| \quad (108)$$

kde ΔM je změna momentu odpovídající změně rychlosti $\Delta \omega$ při stálém napětí U_1 na řidicí fázi.

Není-li na hřidle motoru vložen zatěžovací moment ($M_s = 0$), platí rovnice (101) a s použitím rovnic (106) a (107) dostaneme

$$J \frac{d\omega}{dt} + B\omega = Ku_1 \quad (108)$$

To je lineární diferenciální rovnice prvního rádu s konstantními koeficienty, kterou zavedením vztahu

$$T_1 = \frac{J}{B} \text{ a } K_1 = \frac{K}{B} \quad (109)$$

převedeme ve tvaru

$$(T_1 p + 1)\omega = K_1 u_1 \quad (109)$$

kde $p = \frac{d}{dt}$.

Respektujeme-li také časovou konstantu řidicího vinutí, dostaneme rovnici

$$[T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1]\omega = K_1 u_1 \quad (110)$$

Máme-li napsat rovnici pro tlakovou rychlosť u_1 hřidle motoru, uvážme, že

$$\omega = \frac{dx}{dt}, \text{ a tedy } u = \dot{x}a. \text{ Rovnice}$$

$$p(T_1 p + 1)a = K_1 u_1 \quad (111)$$

Jako četlý příklad příme linearizace pohybových vlastností odvaděnice stejnosměrného servomotoru s cizím buzením. Základní schéma je na obr. 29. Platí pro něj rovnice

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \quad (112)$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + K_1 \phi_{01} \quad (112)$$

$$\Phi = \frac{N_1 i_1}{R_2}, \quad (112)$$

$$K_1 \phi_{01} = J \frac{d\omega}{dt} + m_s(t) \quad (112)$$

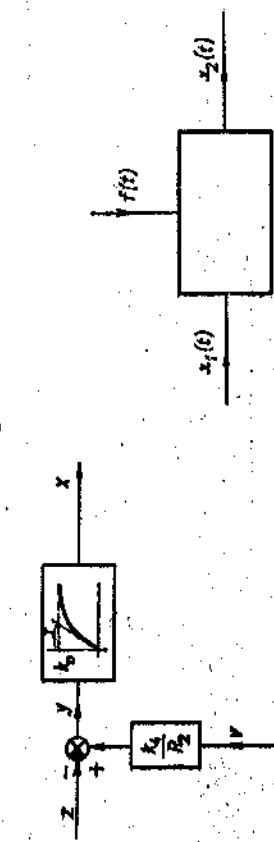
kde u_1, u_2, i_1, i_2 magnetický tok Φ , rychlosť ω a zatěžovací moment $m_s(t)$ jsou proměnné veličiny a R_1, L_1, N_1, R_2, K_1 a J jsou konstanty. Akoli některé z rovnic soustavy (112) jsou opět ne-lineární, můžeme celý postup sestavení výsledné rovnice zjednodušit, učiníme-li následující předpoklady: Pro motor s cizím buzením je $i_1 = \text{konst.}$, z čehož vyplyná $\Phi = \text{konst.}$, a tedy

$K_1\Phi = K_2$ a $K_1\Phi = K_3$. Induktance kotvy L_2 můžeme zanedbat. Pak lze místo (112) napsat přímo

$$J \frac{d\omega}{dt} + \frac{K_3 K_4}{R_2} \omega = \frac{K_4}{R_2} u_2 - m_2(t) \quad (113)$$

Oznáme-li $\omega = x$ jako regulovanou veličinu, $\frac{K_4}{R_2} u_2 - m_2(t) = y$ jako aktívnu veličinu, $m_2(t) = z$ jako peruchovou veličinu a $u_2 = v$ jako výstup z regulátora, můžeme místo rovnice (113) napsat

$$\begin{aligned} T\ddot{x} + x + K_3 y \\ y = \frac{K_4}{R_2} v - z \end{aligned} \quad (114)$$



Obr. 30. Blokové schéma stejnosměrného servomotoru

kde

$$T = \frac{JR_2}{K_3 \cdot K_4} \text{ a } K_4 = \frac{R_2}{K_3 \cdot K_4}$$

Rovnice (114) odpovídá blokové schéma podle obr. 30.

2. Linearizace s použitím Taylorovy věty

Předpokládejme, že daný člen obvodu nebo celý obvod má výstupní signál $z_1(t)$, vstupní signál $x_1(t)$ a ještě na něj přísluší nějaký dany vnější signál $f(t)$ podle obr. 31. Rovnice (sestavená s použitím fyzikálních zákonů platících pro tento člen) nedít jeelinearní, tretího řádu

$$X(X_{10}, 0, X_{20}, 0, 0, 0) = \psi(f, 0) \quad (115)$$

kde X a ψ jsou nelineární funkce proměnných $x_1(t)$, $x_2(t)$ a $f(t)$ a jejich derivací. Rovnice (115) představuje jen určitý příklad a tedy X může být obecná.

né funkci i výšek derivací x_1 nebo x_2 , než je zaznameno v rovnici (115). Předpokládejme, že v ustáleném stavu budou mít všechny signály (x_1 , x_2 i $f(t)$) konstantní hodnoty, které označme X_{10} , X_{20} , f_0 . Pak pro ustálený stav bude platit rovnice

$$X(X_{10}, 0, X_{20}, 0, 0, 0) = \psi(f_0, 0) \quad (116)$$

kde nuly znamenají nulové hodnoty derivací v ustáleném stavu. Dále předpokládejme, že proměnné veličiny x_1 , x_2 se mění tak, že odchylky od rovnovážného stavu zůstávají po celou dobu regulace dostatečně malé. Tento předpoklad je v regulační technice oprávněný, protože této regulaci odpovídá malé odchylky od rovnovážného stavu. Pak budou platit následující vztahy

$$x_1 = X_{10} + \Delta x_1; \quad \dot{x}_1 = \Delta \dot{x}_1 \quad (117)$$

$$x_2 = X_{20} + \Delta x_2; \quad \dot{x}_2 = \Delta \dot{x}_2; \quad \ddot{x}_2 = \Delta \ddot{x}_2$$

kde Δx_1 a Δx_2 jsou vlastní odchylky od rovnovážného stavu. Abychom mohli linearizovat rovnici (115), rozvedeme funkci X na levé straně této rovnice v množinovou řadu podle mocnin x_1 , x_2 , přičemž i derivace povazujme za proměnné. Pak rovnice (115) bude mít tvar

$$\begin{aligned} X(X_{10}, 0, X_{20}, 0, 0, 0) &+ \left(\frac{\partial X}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial X}{\partial \dot{x}_1} \right)_0 \Delta \dot{x}_1 + \left(\frac{\partial X}{\partial x_2} \right)_0 \Delta x_2 + \\ &+ \left(\frac{\partial X}{\partial \dot{x}_2} \right)_0 \Delta \dot{x}_2 + \left(\frac{\partial X}{\partial f} \right)_0 \Delta f + \text{členy vyšších řádu} = \\ &= \psi(f_0, f(t)) \end{aligned} \quad (118)$$

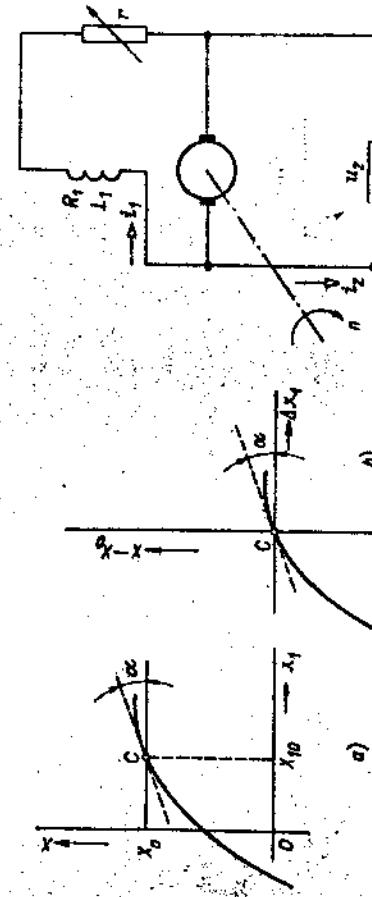
Kde index 0 u parciálních derivací znamená, že do této výrazu dosazujeme hodnoty ustáleného stavu. Jsou to tedy konstanty. Vrější signál $f(t)$ je dán a nezávisí na vlastnostech systému, a proto pravou stranu rovnice (115) v množinovou řadu nerovzdíme. Odetřeme-li od rovnice (118) rovnici ustáleného stavu (116) a zanedbáme-li členy vyššího řádu, dostaneme

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial x_1} \right)_0 \Delta \dot{x}_2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \dot{x}_2} \right)_0 \Delta x_2 + \left(\frac{\partial X}{\partial x_2} \right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial X}{\partial \dot{x}_1} \right)_0 \Delta \dot{x}_1 = \\ = - \left(\frac{\partial X}{\partial x_1} \right)_0 \Delta x_1 - \left(\frac{\partial X}{\partial f} \right)_0 \Delta f + \{\psi(f_0, f(t)) - \psi(f_0, 0)\} \end{aligned} \quad (119)$$

Tato rovnice je lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty. Je usporádána tak, že na levé straně jsou změny výstupní veličiny Δx_2 a jejich derivace a na pravé straně jsou změny vstupního signálu Δx_1 a jejich derivace a daná budicí funkce i její derivace. Rovnice (119) popisuje také dynamické

vlastnosti daného stavu jako rovnice (118) a tím rozdilem, že je rovnice přibližnou, protože byly zanedbaný členy vysokých řádu a plstí jen pro malé odchylky od rovnovážného stavu. Je rovnice v nových proměnných Δx_1 a Δx_2 místo původních proměnných x_1 a x_2 . Proto se rovnice (119) nazývá také rovnice prvního přiblížení, nebo linearizovanou rovnici, nebo lineárním modelem skutečného systému. Naznačený matematický postup můžeme znázornit geometricky. Jestliže skutečnou charakteristikou systému, darou nelinéarní funkci X , znázorníme zjednodušené jen v závislosti na jedné proměnné, například x_1 (obr. 32), pak naznačený postup znázorňuje na jedné náhledu skutečného průběhu v okolí rovnovážného stavu X_0 tehnem, jejž směrnice je dána výrazem $\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\right)_0 = -t g \alpha$.

$$= -t g \alpha. Zavedení nových proměnných Δx_1 , Δx_2 znázorňuje dáná výrazem \left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\right)_0 = -t g \alpha.$$



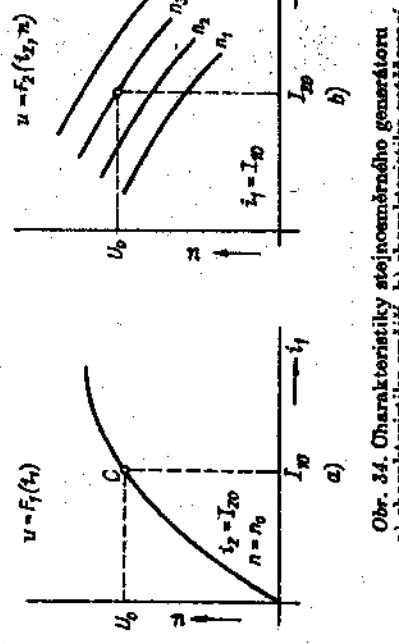
Obr. 32. Linearizace charakteristiky stojnohmerného generátoru v nejednorodém stavu

souhodnicí do bodu C ustáleného stavu (obr. 32). Nahrazení skutečné charakteristiky tečnou bude tím lepší, čím budou odchylky Δx_1 , Δx_2 od rovnovážného stavu menší. Z obrázku 32 i na základě použití Taylorovy věty pro rozvoj funkce v možnémou řádu vyplývá, že linearizace není možná pro nespojitou charakteristiku (reléový aplot).

Napišme v rovnici (119) místo Δx_1 a Δx_2 , x_1 a x_2 a tím, že tyto proměnné budou značit odchylky od rovnovážného stavu. Konstanty na levé straně rovnice označme a_0 , a_{-1} , \dots , a_m na pravé straně rovnice b_m , b_{m-1} , \dots , b_0 a číslovou funkci v závorce $m(t)$. Pak můžeme rovnici (119) nastavat v ohryžkém tvarem (37)

$$a_m x_2^{(m)} + a_{m-1} x_2^{(m-1)} + \dots + a_0 x_2 + a_0 x_1 + b_m x_1^{(m)} + \dots + b_0 x_1 + m(t) \quad (37)$$

Jako příklad linearizujme přenos stejnohmerného dynama s vlastním buzením podle obr. 33. Vstupním signálem je změna odporu r , který při použití vibráčního regulátora je spojován do krátká. Napětí generátoru U_0 závisí na bužidém proudu i_1 , na zatížení i_2 a na rychlosti otáčení n . Tyto závislosti jsou dány charakteristikami na obr. 34. Na obr. 34a je závislost napětí na bužidém proudu při určitém zatížení $i_2 = I_{10}$ a rychlosti otáčení n_0 (charakteristika vrchní); na obr. 34b je závislost napětí U_0 na zatížení i_2 , při dané rychlosti otáčení n a bužidém proudu I_{10} . Z vrchních charakteristik lze pro různá I_{10} a n_0 sestavit setebzovací charakteristiky. Předpokládejme, že při reguleaci bude určena nějaká



Obr. 34. Charakteristiky stojnohmerného generátoru
a) charakteristika vrchní, b) charakteristika zatěžovací

požadovaná hodnota napětí U_0 , kolem které se bude napětí s měnit. Tím bude dán také nutný bužidém proud $i_1 = I_{10} + \Delta i_1$. Pak můžeme na základě dřívější charakteristiky pro napětí U_0 napsat

$$U_0 = F_1(i_1, n) + \left(\frac{\partial U_0}{\partial i_1} \right)_n \cdot \Delta i_1 \quad (121)$$

Jde $\left(\frac{\partial U_0}{\partial i_1} \right)_n = R_{10}$ je dánou tečnou k charakteristice v bodě C na obr. 34a. Reakce kotvové je zahrnuta v zatěžovací charakteristice v bodě C na obr. 34b. Soudobě musí pro obvod buzení platit rovnice

$$U_0 = R_1 i_1 + r_1 + I_1(i_1) \frac{di_1}{dt} \quad (122)$$

Jde R_1 je odpor bužidého vinutí,
 r pronídaný odpor,
 I_1 indukčnost, která závisí na proudu i_1 , tj. $I_1 = I_1(i_1)$.

Obě rovnice jsou nejednorodé. Jednoznačné řešení lze získat pomocí následujících odhadů:

$$\begin{aligned} u &= U_0 + \Delta u \\ i_1 &= I_{10} + \Delta i_1 \\ i_2 &= I_{20} + \Delta i_2 \\ n &= n_0 + \Delta n \\ r &= R_0 + \Delta r \\ L_1 &= L_{10} + \Delta L_1 \end{aligned} \quad (123)$$

Pro konstantní složky proměnných platí tyto vztahy

$$U_0 = F_2(I_{20}, n_0) \quad (124)$$

$$U_0 = R_1 I_{10} + R_0 I_{20} \quad (125)$$

Linearizace rovnice (122) a po odečtení rovnice (125) dostaneme

$$\Delta u = (R_1 + R_0) \Delta i_1 + I_{10} \Delta r + L_{10} \frac{d \Delta i_1}{dt} \quad (126)$$

Do této rovnice dosadíme Δi_1 , které odvodíme z rovnice (124) s použitím vztahu (123)

$$\Delta u = u - U_0 = F_2(i_{10}, n) + R_{10} \Delta i_1 - U_0 \quad (127)$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{R_1 + R_0}{R_{10}} \Delta u + I_{10} \Delta r + \frac{L_{10}}{R_{10}} \frac{d \Delta u}{dt} - \\ &- \frac{I_{10}}{R_{10}} \cdot \frac{d}{dt} [F_2(i_{10}, n) - U_0] - \frac{R_1 + R_0}{R_{10}} [F_2(i_{10}, n) - U_0] \end{aligned} \quad (128)$$

Tuto rovnici můžeme přepsat na tvar

$$(T_1 p + 1) \Delta u = -K_1 \Delta r + (a_0 p + a_1) f(t) \quad (129)$$

kde $p \equiv \frac{d}{dt}$

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{L_{10}}{R_1 + R_0 - R_{10}}; \quad a_0 = T_1 \\ K_1 &= \frac{I_{10} R_{10}}{R_1 + R_0 - R_{10}}; \quad a_1 = \frac{R_1 + R_0}{R_1 + R_0 - R_{10}} \end{aligned} \quad (130)$$

$$f(t) = F_2(i_{10}, n) - U_0 \quad (131)$$

Rovnice (128) je $i_1(t) = i_1(t) + u = u(t)$, takže linearizovaná rovnice udává vztah mezi malými změnami Δu a změnami Δr při matici se záťdí $f_i(t)$ a rychlostí otáčení $n(t)$. Při vyšetřování stability nebo jiných otázkách určujeme namísto i_1 a n , takže podle rovnice (124) a (131) je $f(t) = 0$. Pak rovnice generátora je

$$(T_1 p + 1) \Delta u = -K_1 \Delta r \quad (132)$$

Jako druhý příklad použijeme rovnice sestavované funkcií ω Taylorova řady pro rovnici (102) obecného motoru. Dostaneme

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega}{dt} &= M_{10} + \left(\frac{\partial M_h}{\partial x} \right)_{x=x_0} \Delta x - \\ &- \left(\frac{\partial M_s}{\partial \omega} + \frac{\partial M_h}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} \Delta \omega - M_{20} \end{aligned}$$

Pro ustálěný stav platí

$$M_{10} - M_{20} = 0$$

a tento vztah lze napsat

$$J \frac{d\Delta \omega}{dt} + \left(\frac{\partial M_s}{\partial \omega} + \frac{\partial M_h}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0} \Delta \omega = \left(\frac{\partial M_h}{\partial x} \right)_{x=x_0} \Delta x$$

Velmi často rovnici přepisujeme do tzv. bezrozměrného tvaru. K tomu zavedeme bezrozměrné proměnné

$$\varphi = \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \quad a \quad \mu = \frac{\Delta x}{x_0}$$

definované poměrem jednotlivých veličin k jejich jmenovitým hodnotám ω_0 a x_0 .

Kromě toho zavedeme nové konstanty

$$T = \frac{J \omega_0 K}{x_0 \left(\frac{\partial M_h}{\partial x} \right)_{x=x_0}} \quad a \quad K = \frac{x_0 \left(\frac{\partial M_h}{\partial x} \right)_{x=x_0}}{\omega_0 \left(\frac{\partial M_s}{\partial \omega} + \frac{\partial M_h}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega_0}}$$

A dostaneme konečné míslo (102) lineární diferenciální rovnici obecného motoru ve tvaru

$$(T p + 1) \varphi = K \mu$$

3. Linearizace metodou minimálních kvadratických odchylek

Předpokládejme, že nějaký prvek má výstupní signál y , který závisí na vstupních signálech x_1, x_2, \dots, x_n . Pro nějaký pracovní bod dány hodnotami $Y_0, X_{10}, X_{20}, \dots, X_{n0}$ známe soubor hodnot Δy příslušných k určitému $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, získaný například měřením. Jelikož je takových množství m , známe to, že známe m hodnot Δy , které přísluší hodnotám $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$. $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m, \dots, \Delta x_n$. Předpokládáme $m > n$.

Chceme užít vztah mezi malými změnami Δy a změnami $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, tak, aby byl lineární:

$$\Delta y = K_1 \Delta x_1 + K_2 \Delta x_2 + \dots + K_n \Delta x_n \quad (133)$$

Konstanty K_1, K_2, \dots, K_n určíme tak, aby součet druhých mocnin rozdílu mezi Δy daným touto rovnicí a Δy zjištěným v měření byl minimální.

To známena najít taková K_1, K_2, \dots, K_n , aby

$$E^2 = \sum_{i=1}^m (K_1 \Delta x_{i1} + K_2 \Delta x_{i2} + \dots + K_n \Delta x_{in} - \Delta y_i)^2 \quad (134)$$

bylo minimální. K tomu je třeba položit rovnou první parciální derivace:

$$\frac{\partial E^2}{\partial K_1} = \frac{\partial E^2}{\partial K_2} = \dots = \frac{\partial E^2}{\partial K_n} = 0$$

Dostaneme pro K_1

$$\frac{\partial E^2}{\partial K_1} = \sum_{i=1}^m 2(K_1 \Delta x_{i1} + K_2 \Delta x_{i2} + \dots + K_n \Delta x_{in} - \Delta y_i) \Delta x_{i1} = 0$$

tedy přepíšeme na tvar

$$K_1 \sum_{i=1}^m \Delta x_{i1} \Delta x_{i1} + K_2 \sum_{i=1}^m \Delta x_{i2} \Delta x_{i1} + \dots + \\ + K_n \sum_{i=1}^m \Delta x_{in} \Delta x_{i1} = \sum_{i=1}^m \Delta y_i \Delta x_{i1} \quad (135)$$

Opakováním tohoto postupu pro K_2, \dots, K_n , dostaneme soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých K_1, K_2, \dots, K_n .

Pro den s jedním vstupem a jedním výstupem

$$\Delta y = K \Delta x$$

$$K = \frac{\sum_{i=1}^m \Delta x_i \Delta y_i}{\sum_{i=1}^m \Delta x_i^2} \quad (136)$$

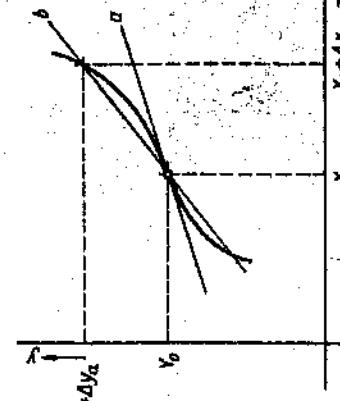
Pro den s dvěma vstupními signály

$$\Delta y = K_1 \Delta x_1 + K_2 \Delta x_2$$

buďte

$$K_1 = \frac{ab - ce}{ab - c^2} \quad (137)$$

$$K_2 = \frac{ad - ce}{ab - c^2}$$



Obr. 35. Linearizace nelineární charakteristiky
a) approximace technou, b) sproximace metodou
nejmenších čtvereců odchylek

V případech, když pracovní oblast je dosti velká, metoda minimální kvadratické odchylky dává lepší lineární approximaci než metoda sproximace technou. To znázorňuje obr. 35, kde pracovní bod je dán souřadnicemi X_0, Y_0 . a) pracovní oblast je dáná souřadnicí $\pm \Delta x$, kolem pracovního bodu. Průměk a) znázorňuje approximaci technou, jak to odpovídá použití Taylorovy výzvy, a) průměk b) je approximace metodou nejmenších čtvereců odchylek. Ačkoliv její směrnice neodpovídá směrnici dané charakteristiky v pracovním bodě, ve skutečnosti v celé pracovní oblasti málo odchyluje od dané charakteristiky.

Jako příklad uvedeme linearizaci členu s charakteristikou podle obr. 36 [4.5]. Pracovní bod je dán veličinami

$$Y_0 = 4$$

$$X_{10} = 4$$

$$X_{20} = 0$$

V charakteristikách (obr. 36) jsou uvedeny jednotlivé hodnoty proměnných pro devět zvolených bodů $m = 9$ a sestaveny do následující tabulky:

LITERATURA KE 4. KAPITOLE

- [4.1] Kompenážer, A. S.: Teoretická fyzika. Praha: SNTL 1960
- [4.2] Košek, Z., Kubík, Š.: Nejnéarní obvody. Praha: SNTL 1962
- [4.3] Popov, E. P.: Dinamika systémů automatizovaného regulování. Moskva: GITTL 1954
- [4.4] Solodovnikov, V. V.: Osnovy avtomatizovaného regulování. Gos. naúč. techn. izd. nař. lit., Moskva, 1954
- [4.5] Thaler, G. J., Peet, M. P.: Analysis and Design of Nonlinear Feedback Control Systems. McGraw-Hill Company, INC. New York, London 1962
- [4.6] Trnka, Z.: Servomechanismy. Praha: SNTL 1954

Výpočet podle vzorce (138) dá

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^9 \Delta x_{3i} = 6 \\ b &= \sum_{i=1}^9 \Delta x_{2i} = 6 \\ c &= \sum_{i=1}^9 \Delta x_{1i} \Delta x_{3i} = 0 \\ d &= \sum_{i=1}^9 \Delta y_i \Delta x_{2i} = 8 \\ e &= \sum_{i=1}^9 \Delta y_i \Delta x_{1i} = 9 \end{aligned}$$

Obr. 36. Charakteristiky nejnéarného členu

-2	-1	0	1	2	-4	x_1
1	2	3	4	5	6	$x_2 = -1$
2	1	0	-1	-2	-3	$x_3 = 1$

takže

$$\Delta y = 1,5\Delta x_3 + 1,33\Delta x_2$$

KONTROLNÍ OTÁZKY KE 4. KAPITOLE

1. Jak se odvodí pohybová rovnice servomechanismu, obecného motoru a jiných fyzikálních systémů?
2. Jaké znáte způsoby linearizace?
3. Jak se linearizuje přenos servomotoru podle daných charakteristik?
4. Jak se použije Taylorovy věty k linearizaci rovnice daného systému?
5. Co jsou to rovnice prvního přiblížení, lineární model?
6. Jak se převedou dané rovnice na bezrozměrný tvar?
7. Jak se postupuje při linearizaci metodou minimálních kvadratických odchylek?

5. OBRAZOVÝ A FREKVENČNÍ PŘENOS

Tento přenos nezávisí na průběhu vstupního signálu a je k danému systému jediný. Srovnaním s rovnici (140) vidíme, že jmenovatel tohoto přenosu, položime-li jej roven nule, $N(p) = 0$, je charakteristikou rovnice daného systému.

Odezvu daného členu, tj. průběh jeho výstupního signálu $x_2(t)$ předáný k určitému vstupnímu průběhu $x_1(t)$, určíme s použitím přenosu přímo zpracovanou transformaci k obrazu $X_2(p)$, který je dán vztahem

$$X_2(p) = F(p)X_1(p) \quad (143)$$

Přitom předpokládáme, že v počátečním okamžiku byl uvažovaný člen v klidovém stavu.

Obrazový přenos lineárního členu má tedy základní vlastnost:

1. $F(p)$ je funkce racionální lomená proměnné p , jejíž stupně čitatel je menší nebo nejvýše roven stupni jmenovatele, $m \leq n$.

2. Koefficienty a_i i b_i jsou vždy reálné.

3. Rozložíme-li mnohočleny v čitateli i jmenovateli přenosu na součiny kořnových činitelů, dostaneme

$$F(p) = \frac{b_m(p - n_1)(p - n_2)\dots(p - n_m)}{a_n(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n)} \quad (144)$$

kde n_i jsou nuly přenosu a p_i jsou polý. Nuly jsou hodnoty proměnné p , pro které nabývá přenos $F(p)$ nulových hodnot. Polý jsou ty hodnoty proměnné p , pro které nabývá přenos nekonečných hodnot. Nuly i polý mohou být reálné, komplexní nebo i čistě imaginární. Komplexní polý a nuly musí být jen komplexně sdružené.

4. Všechny polý přenosu $F(p)$ stabilního členu nebo systému musí ležet v levé polovině roviny $p = c + j\omega$.

Přenos daného členu tříce souvisí s jeho přechodovou funkcí $h(t)$. Označme-li obraz přechodové funkce $H(p)$ a desadime-li do vztahu (143) za jednotkový skok na vstupu jeho obraz $X_1(p) = 1/p$, dostaneme

$$H(p) = F(p) \frac{1}{p} \quad (145)$$

Podle toho můžeme přenos $F(p)$ definovat

$$F(p) = pH(p) \quad (146)$$

S použitím tohoto vztahu a rovnice (143) je odezva daného členu $x_2(t)$ na daný vstupní signál $x_1(t)$ dána obrazovou rovnici

$$X_2(p) = pH(p) X_1(p) \quad (147)$$

Ve třetí kapitole, ve které jsme se zabývali různými způsoby popisu dynamických vlastností regulačních obvodů, jsme uvedli, že pro analýzu i syntézu je zvláště vhodné používat tzv. obrazových přenosů. Tam jsme také definovali obrazový přenos jako poměr obrazu výstupního signálu k obrazu vstupního signálu daného členu, jestliže je tento v počátečním okamžiku v klidovém stavu. Základem této definice je tedy Laplaceova transformace, jejíž základní vlastnosti jsme uvedli ve druhé kapitole. V této kapitole probereme základní vlastnosti obrazových a frekvenčních přenosů, ukážeme jejich souvislosti s diferenciálními rovnicemi, s přechodovými a impulsními charakteristikami uvažovaných členů. Kromě toho uvedeme různé druhy přenosů, které umožňují zjednodušit řešení určitých regulačních problémů.

Předpokládejme lineární člen s jedním vstupem $x_1(t)$ a výstupem $x_2(t)$. Popsaný lineární diferenciální rovnici

$$\begin{aligned} a_n x_2^{(n)} + a_{n-1} x_2^{(n-1)} + \dots + a_1 x_2' + a_0 x_2 &= \\ = b_m x_1^{(m)} + b_{m-1} x_1^{(m-1)} + \dots + b_1 x_1' + b_0 x_1 & \end{aligned} \quad (139)$$

V předchozí čtvrté kapitole jsme ukázali, jak k této rovnici dospijemek linearizaci přenosových vlastností daného členu. Předpokládáme-li, že uvažovaný člen je v počátečním okamžiku v klidovém stavu, bude této rovnici odpovdat podle druhé kapitoly operátorský rovnice

$$N(p)X_2(p) = M(p)X_1(p) \quad (140)$$

kde

$$\left. \begin{aligned} N(p) &= a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \\ M(p) &= b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

případě $m \leq n$.

Z operátorské rovnice (140) můžeme přímo určit obrazový přenos

$$F(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{M(p)}{N(p)} \quad (142)$$

S použitím výsledku konvoluci operatorového počtu dostaneme časový průběh odzvry

$$x_2(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t h(t-\tau) x_1(\tau) d\tau \quad (148)$$

Tento vztah se nazývá konvolutorní integrál. Je možno jej přepsat do následujících tvrží

$$\left. \begin{aligned} x_2(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t h(\tau) x_1(t-\tau) d\tau \\ x_2(t) &= h(0) x_1(0) + \int_0^t h(\tau) \dot{x}_1(t-\tau) d\tau \\ x_2(t) &= h(0) x_1(t) + \int_0^t h(t-\tau) x_1(\tau) d\tau \\ x_2(t) &= h(t) x_1(t) + \int_0^t h(t-\tau) \dot{x}_1(\tau) d\tau \\ x_2(t) &= h(t) x_1(t) + \int_0^t h(t-\tau) x_1(\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (149)$$

Konvolutorní integrál je v podstatě matematickým vyjádřením principu superpozice.

Předpokládejme podle obr. 37. Náme určit výstupní signál $x_2(t)$ v určitém časovém okamžiku t .

Rozdělme časový interval od $\tau = 0$ do $\tau = t$ na n stejných časových článků o délce $\Delta\tau$.

Tim se nahradí průběh $x_1(\tau)$ stupňovitou křivkou podle obr. 37. Jestliže je $\Delta\tau$ dostatečně malé, můžeme v příslušném členu stanovit velikost příslušného stupňového funkce

$$\Delta x_1 = \dot{x}_1(\tau_i) \Delta\tau \quad (150)$$

Obr. 37. Výjádření průběhu posloupnosti skokových signálů

Přisobení vstupního signálu x_1 na daný člen nahradíme písobením posloupnosti skokových signálů, které přichází posunuty o časové úseky $\Delta\tau$. Každý skokový signál vytváří na výstupu příslušný průběh odpovídající přechodové funkci posunuté o τ_i s amplitudou Δx_1 . Výsledný průběh vstupního signálu x_2 je pak dán na základě principu superpozice součtem všech dílčích signálů v intervalu $0 < \tau < t$

$$x_2(t) = x_1(0) h(t) + \sum_{i=1}^n x_1(\tau_i) h(t - \tau_i) \Delta\tau \quad (151)$$

Jestliže $\Delta\tau \rightarrow 0$, přejde proměnné τ_i v běžný čas τ a součet se změní na integral s mezení 0 a t . Místo vztahu (151) pak dostaneme předposlední z tvrží konvolutorních integrálů (149).

Obrazový přenos je možno také definovat jako Laplaceovu transformaci tzv. impulsní funkce $g(t)$, která se někdy také nazývá ráhovou funkce. Definujeme ji jako derivaci přechodové funkce $h(t)$, tj.

$$g(t) = \frac{d}{dt} [h(t)] \quad (152)$$

Poslední ze vztahů (149) můžeme pak napsat

$$x_2(t) = h(0) x_1(t) + \int_0^t g(t-\tau) x_1(\tau) d\tau \quad (153)$$

Pro mnoho členů platí, že jejich přechodová charakteristika zahrnuje v mimořádnou hodnotou $h(0)$, tj. $h(0) = 0$. Pak se vztah (153) zjednoduší na

$$x_2(t) = \int_0^t g(t-\tau) x_1(\tau) d\tau \quad (154)$$

Funkce $g(t)$ se nazývá impulsní funkce, protože určuje odzvu na krátké impulsy. Předpokládejme, že $x_1(t)$ je impuls o libovolném průběhu, ale velmi krátké době trvání. Označme-li jeho dobu trvání t_s , bude rovnice (154) mit tvrž

$$x_2(t) = \int_0^{t_s} g(t-\tau) x_1(\tau) d\tau \quad (155)$$

Vzhledem k velmi malé době trvání impulsu můžeme použít na integral (155) vztu o střední hodnotě, takže bude platit

$$x_2(t) = g(t-T) \int_0^{t_s} x_1(\tau) d\tau = g(t-T) S \quad (156)$$

kde $0 < T < t_s$ a S je plocha impulsu. Pro impuls s velmi krátkou dobou trvání je možno tedy místo vztahu (156) napsat

$$x_2(t) = g(t) S \quad (157)$$

Jestliže plocha $S = 1$, pak podle definice uvedené v druhé kapitole je tento impuls Diracovou funkcí $\delta(t)$. Impulsní funkce $g(t)$ pak určuje odzvu daného členu na tento Diracův impuls. To je v souladu s tím, že podle druhé kapitoly

je Laplaceov obraz Diracova impulu $L[\delta(t)] = 1 = X_1(p)$. Podle vztahu (143) je obraz odezvy na tento impuls

$$X_2(p) = F(p)$$

a můžeme tedy říci, že obrazový přenos $F(p)$ je obrazem impulsní funkce, je-li sphněna podmínka, že v $t = 0$ je $x(0) = 0$.

Vedle obrazového přenosu používáme často také tzv. *frekvenčního přenosu*, který je možno definovat několika způsoby. Jednak tak, jak bylo ukázáno již ve třetí kapitole, kde byl definován jako poměr vektoru výstupního sinusového signálu k vektoru vstupnímu signálu daného členu. Takto definovaný přenos můžeme přímo mít z diferenciální rovnice (139), převedeme-li ji na *romici frekvenční*. K tomu dosadíme do rovnice (139) za proměnné $x_i(t)$ a $x_2(t)$ vektory $X_1(p)$ a $X_2(p)$ dané vztahy (68) a (70), přičemž $p = j\omega$. Dostaneme tak frekvenční rovnici

$$\begin{aligned} a_n p^n X_2(p) + a_{n-1} p^{n-1} X_2(p) + \dots + a_1 p X_2(p) + a_0 X_2(p) \\ = b_m p^m X_1(p) + b_{m-1} p^{m-1} X_1(p) + \dots + b_1 p X_1(p) + b_0 X_1(p) \end{aligned} \quad (158)$$

Z této rovnice se určí frekvenční přenos jako poměr $X_2(p)/X_1(p)$

$$F(p) := \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{Y(p)}{N(p)} \quad (159)$$

Formálně je tento přenos stejný, jako byl obrazový přenos (142), jen s tím rozdílem, že zde $p = j\omega$.

Druhá možnost (jak definovat frekvenční přenos) je použití *Fourierovy transformace*, která je definována následujícími vztahy

$$\begin{aligned} X_1(j\omega) &= \int_a^b x(t) e^{-j\omega t} dt \\ (160) \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (161)$$

Jak známo z matematiky, musí přitom funkce $x(t)$ vyhovovat následujícím podmínkám:

a) $x(t) = 0$ pro $t < 0$,

b) $\int_0^{\infty} |x(t)| dt$ konverguje absolutně.

V hořejších definičních vztazích Fourierovy transformace je $X(j\omega)$ Fourierův obraz časového průběhu $x(t)$. Srovnejme-li vztahy (160) a (161) se základními definičními vztahy Laplaceovy transformace (1) a (31), vídme, že formálně jsou obě transformace stejné, zaměníme-li p za $j\omega$. Ve Fourierově transformaci však výše uvedené podmínky pro funkci $x(t)$ ohranicují méně oblast funkcí, pro které Fourierova transformace platí, než pro které platí Laplaceova transformace. Na základě platnosti podmínky b) můžeme dokázat, že pro funkce, které ji vyhovují, je správný vztah

$$X(j\omega) := \lim_{c \rightarrow 0} X(c + j\omega) \quad (162)$$

Je možno dospět k závěru, že Fourierova transformace můžeme dostat z Laplaceovy transformace prostou zámenou $j\omega$ za p . Pak také frekvenční přenos $F(j\omega)$ je možno dostat přímo z obrazového přenosu $F(p)$ zámenou $j\omega$ za p . Na základě toho je možno definovat frekvenční přenos jako poměr Fourierova obrazu vstupního signálu k Fourierovu obrazu vstupního signálu.

Tak jako obrazový přenos byl definován jako Laplaceov obraz impulsní funkce

$$F(p) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt \quad (163)$$

je možno frekvenční přenos definovat jako Fourierovu transformaci impulsní funkce, t.j.

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} [g(t) \cos \omega t - j g(t) \sin \omega t] dt \quad (164)$$

Zavedení frekvenčního přenosu, pro který platí větší omezení než pro operatorový přenos, má však velký praktický význam pro řešení regulačních problémů. Je totiž základem tzv. *frekvenčních* metod. Znázornění frekvenčního přenosu ve tvaru frekvenčních charakteristik umožňuje i pro regulační obvody vysokého řádu řešit otázky syntézy, stability i kvality regulace, a dokonce používat přímo experimentálně zjištěých charakteristik. Různé druhý frekvenční charakteristiky, jejich sestrojování i použití probereme v následující kapitole.

Použití přenosů k popisu vlastností jednotlivých členů regulačních obvodů umožňuje poměrně jednoduše řešit i složité obvody. Nejčastějším případem je zapojení členů regulačního obvodu *in sérii*, jak je znázorněno na obr. 38. Pro jednotlivé členy platí vztahy

$$X_2(p) = F_1(p) X_1(p)$$

$$X_3(p) = F_2(p) X_2(p) \quad (165)$$

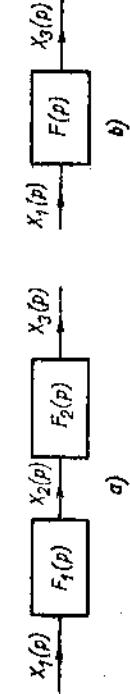
Předpokládáme-li, že zapojení členů s přenosem $F_1(p)$ nezmění tento přenos, můžeme pro výstupní signál x_3 napsat

$$X_3(p) = F_2(p) X_2(p) = F_2(p) F_1(p) X_1(p) \quad (166)$$

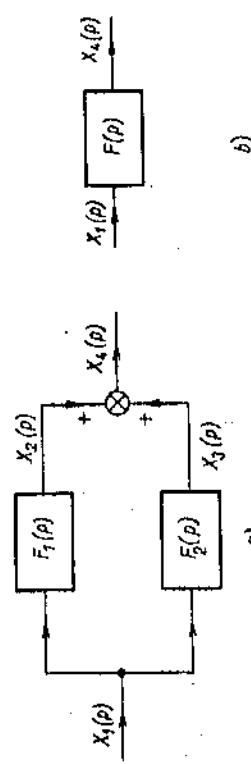
Je tedy možno nahradit členy zapojené za sebou jedním členem podle obr. 38 s přenosem

$$F(p) = \frac{X_3(p)}{X_1(p)} = F_1(p) F_2(p) \quad (167)$$

Při řazení členů za sebou je tedy výsledný přenos dán součinem přenosů jednotlivých členů.



Obr. 38. Sériové řazení členů



Obr. 39. Paralelní řazení členů

Druhým základním zapojením je *paralelní řazení členů* podle obr. 39.

Pro tento obrázek platí vztahy

$$\left. \begin{aligned} X_2(p) &= F_1(p) X_1(p) \\ X_3(p) &= F_2(p) X_1(p) \\ X_4(p) &= X_2(p) + X_3(p) \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

Výsledný signál x_4 je dán vztahem

$$X_4(p) = F_1(p) X_1(p) + F_2(p) X_1(p) = [F_1(p) + F_2(p)] X_1(p) \quad (169)$$

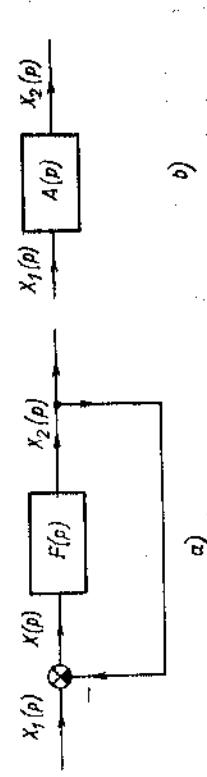
Na základě tříšťe uvedených vztahů můžeme pro výsledný přenos napsat

$$F(p) = \frac{X_4(p)}{X_1(p)} = F_1(p) + F_2(p) \quad (170)$$

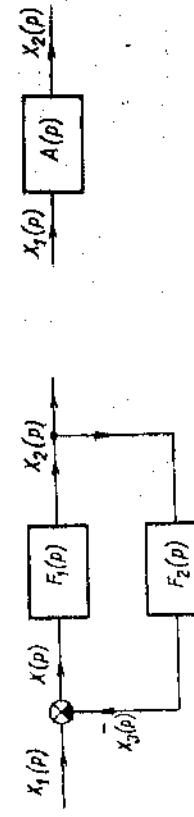
pri paralelním řazení členů je jejich výsledný přenos dán součtem přenosů jednotlivých členů.

Třetím základním zapojením v blokových schématách je *zapojení zpětné vazby* podle obr. 40a. Mámme-li toto zapojení nahradit jedním členem podle obr. 40, určíme jeho přenos $A(p)$ takto:

$$A(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{\frac{X_2(p)}{X(p)}}{1 + \frac{X_2(p)}{X(p)}} = \frac{F(p)}{1 + F(p)} \quad (171)$$



Obr. 40a. Zapojení se zpětnou vazbou



Obr. 40b. Antiparalelní zapojení

Přenos $F(p)$ se nazývá *přenosem rozpojeného obvodu*, protože je v podstatě přenosem uspořádání podle obr. 40 při rozpojené zpětné vazbě. Přenos $A(p)$ je tzv. *celkový přenos*. Je-li zpětná vazba kladná, znamená to, že signál x_2 se na vstupu přičítá k signálu x_1 a platí pak pro celkový přenos vztah

$$A(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{F(p)}{1 - F(p)} \quad (172)$$

Výše uvedená pravidla pro určování celkových přenosů postačují k určení výsledných přenosů složitých blokových schémat. Proto uvedeme ještě několik dalších základních velmi často používaných vztahů pro zjednodušování blokových schémat. Na obr. 41 je velmi často používané tzv. *antiparalelní řazení členů*. Podle obr. 41 můžeme napsat tyto základní rovnice

$$\left. \begin{aligned} X(p) &= X_1(p) - X_2(p) \\ X_2(p) &= F_1(p) X(p) \\ X_3(p) &= F_2(p) X_2(p) \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

Náhradní člen podle obr. 41 má pak přenos

$$A(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{\frac{F_2(p)}{F_1(p)}}{1 + \frac{X_3(p)}{X_1(p)}} = \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) F_2(p)} \quad (174)$$

Toto řazení členů je v podstatě zapojením tzv. korekčního člena $F_2(p)$ ve zpětné vazbě.

Jmenovatel výsledného přenosu

$$1 + F_1(p) F_2(p)$$

je charakteristický pro všechna zapojení se zápornou zpětnou vazbou. V podstatě odpovídá charakteristické rovnici, protože můžeme na základě rovnice (174) napsat

$$X_2(p) [1 + F_1(p) F_2(p)] = F_1(p) X_1(p) \quad (175)$$

a tedy algebrická rovnice

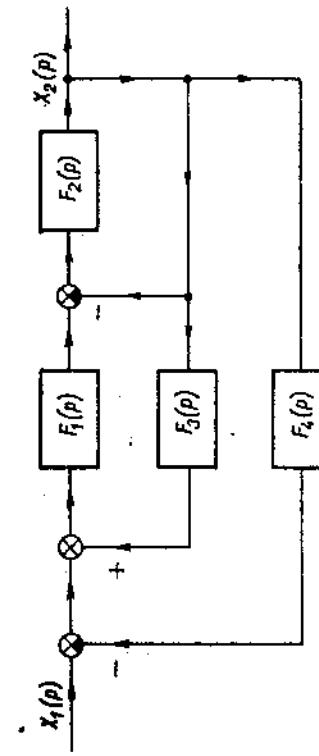
$$1 + F_1(p) F_2(p) = 0 \quad (176)$$

je charakteristickou rovnici diferenciální rovnice obvodu.

Přenos $F_1(p) F_2(p)$ je vlastně přenos obvodu, který vznikne rozpojením zpětné vazby. Proto mu také říkáme přenos rozpojeního (otevřeného) obvodu.

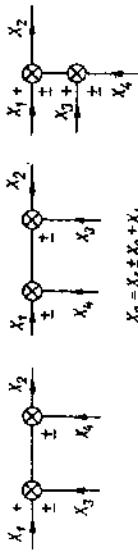
V čítatele rovnice (174) je přenos $F_1(p)$, tzv. přenos přímé cesty.

Lze určit jednoduché pravidlo pro stanovení celkového přenosu složitého obvodu. Do čítatele se uvede přenos přímé cesty a do jmenovatele nejdříve



Obr. 42. Blokové schéma složitého obvodu

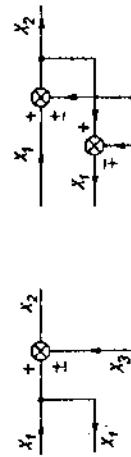
Tabulka 3



1, přemísťení součtových členů



2, přemísťení rozvětvovacích bodů

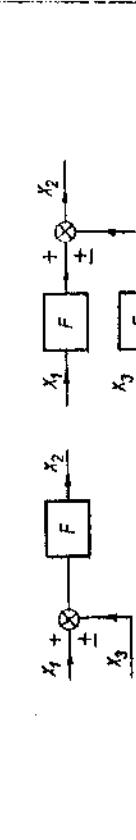


$X_2 = X_1 \pm X_3 \pm X_4$
3, přemísťení rozvětvovacích bodů
zo součtový člen



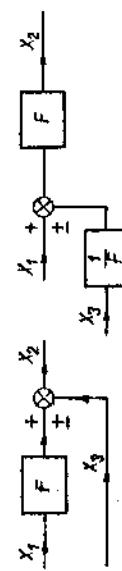
$X_2 = X_1 \pm X_3$
4, přemísťení rozvětvovacích bodů
před součtový člen

Pohlazení tabulky 3



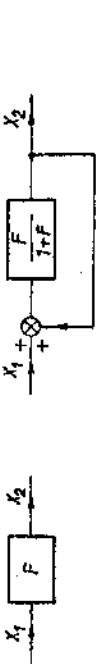
$$x_2(p) = F(p) [x_1(p) \pm x_3(p)]$$

5, přemísťení součtového člena za funkční člen



$$x_2(p) = F(p) x_1(p) \pm x_3(p)$$

6, přemísťení součtového člena před funkční člen



$$x_2(p) = F(p) x_1(p)$$

7, zámena člena zpětnovazebním obvodem



$$x_2(p) = \frac{F_1(p)}{1 \pm F_1(p), F_2(p)} x_1(p)$$

8, přemísťení člena ze zpětné vazby

jednička a potom se přítoku (pro kladnou vazbu odečtu) přenosy všech uzavřených zpětnovazebních cest. Pro obvod na obr. 42 můžeme podle tohoto pravidla přímo napsat výsledný celkový přenos

$$A(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{F_1(p) F_2(p)}{1 + F_1(p) - F_2(p) F_3(p) F_4(p)}$$

Některá z dalších pravidel zjednodušování blokových schémat jsou uvedena v tabulce 3.

V regulaci technice se používá také tzv. přenos *řízení a poruchy*. Často totiž výsledněme průběh regulační veličiny způsobený změnou vstupních signálů regulačního obvodu.

Rozlišujeme dva základní

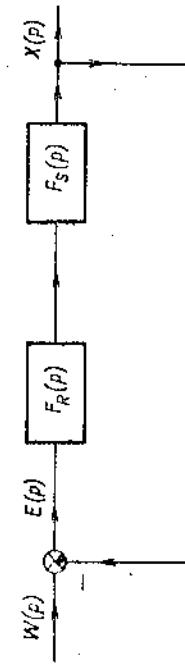
druhy vstupních signálů, a to poruchový signál a řídicí signál. Uvažujeme regulační obvod podle obr. 43. Jakkým způsobem poruchový signál $u(t)$ ovlivňuje regulační veličinu, určuje tzv. *přenos poruchy*, který je definován vztahem

$$F_u(p) = \frac{X(p)}{U(p)} \quad (177)$$

Při známém přenosu soustavy F_s a regulátoru F_R jej můžeme stanovit pomocí vzorce pro výsledný přenos antiparalelního zapojení, tedy

$$F_u(p) = \frac{F_s(p)}{1 + F_s(p) F_R(p)} \quad (178)$$

Tento výraz platí za předpokladu, že $w = 0$, tj. že uvažujeme jen změny poruchové veličiny u . Takový předpoklad lze pro lineární systémy udělat, protože pro ně platí princip superpozice. Průběh regulační veličiny při současném způsobení poruchového i řídicího signálu je dán soustem průběhu regulační veličiny x , vyvolaných každým signálem odděleně.



Obr. 44. Transformované blokové schéma regulačního obvodu

Podobně lze odvodit i přenos řízení, kterým je určena odezva regulačního zařízení na změnu řidicích veličin. To je důležité zejména při programovém řízení, všechny regulaci a v servomechanismech. Překreslime-li obr. 43 na tvar podle obr. 44, můžeme přímo napsat pro přenos řízení za předpokladu neměniče se poruchové veličiny (tj. $u = 0$)

$$F_m(p) = \frac{X(p)}{W(p)} = \frac{F_R(p) F_S(p)}{1 + F_R(p) F_S(p)} \quad (179)$$

Často se také používá přenosů, které určují *regulační odchylku v závislosti na poruchové nebo jen na řidicí veličině*. Pro poruchu platí

$$F_{ue}(p) = \frac{E(p)}{U(p)} = -\frac{F_k(p)}{1 + F_k(p) F_s(p)} \quad (180)$$

a pro řízení

$$F_{ue}(p) = \frac{E(p)}{W(p)} = \frac{1}{1 + F_k(p) F_s(p)} \quad (181)$$

V mnohých případech nás v regulační technice zajímá předešlý ustálený stav, zvláště pak velikost odchylky v ustáleném stavu. Ta nám totiž určuje *přenos regulace*. Obraz průběhu odchylky v závislosti na poruchové veličině nebo řidicí veličině je dan vztahy (180) a (181). Časový průběh odchylky dostaneme zpětnou Laplaceovou transformací. Ustálený stav, tj. velikost odchylky pro $t \rightarrow \infty$ můžeme vypočítat přímo z obrazu odchylky bez zpětné Laplaceovy transformace použitím věty o limitě. Obraz průběhu odchylky při působení poruchové veličiny u je podle (180)

$$E(p) = -\frac{F_s(p)}{1 + F_k(p) F_s(p)} U(p) \quad (182)$$

Ustálený stav, tj. $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$ stanoví se přímo z obrazu $E(p)$, protiže platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p E(p) \quad (183)$$

Z výrazu (182) vyplývá, že přenos závisí jednak na vlastnostech obvodu, tj. na jeho přenosu, jednak na vstupní funkci, v našem případě u .

V servomechanismech se k určení přenosnosti používá tzv. *koefficient odchylky*.

Přenos odchylky je tam definován vztahem $E(p)/\Phi_1(p)$, kde $e(p)$ je образ regulační odchylky a $\Phi_1(p)$ obraz vstupního signálního servomechanismu. Tento přenos odchylky můžeme rozložit na mocninovou řadu podle p

$$\frac{E(p)}{\Phi_1(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n p^n}{n!} \quad (184)$$

Pro regulační odchylku e je pak možno napsat

$$E(p) = C_0 \Phi_1(p) + C_1 p \Phi_1(p) + \frac{1}{2} C_2 p^2 \Phi_1(p) + \dots \quad (185)$$

Rada (185) konverguje v okolí bodu $p = 0$. Proto ji můžeme použít k určení $e(t)$, které bude konvergovat pro velké hodnoty t , tj. pro ustálený stav. Odchylka v ustáleném stavu je dána výrazem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = C_0 \Phi_1(t) + C_1 \frac{d \Phi_1(t)}{dt} + \frac{1}{2} C_2 \frac{d^2 \Phi_1(t)}{dt^2} + \dots \quad (186)$$

Vidíme, že regulační odchylka má řadu složek, které jsou úměrné vstupnímu signálu i jeho derivacím. Konstanty C_n jsou koefficienty chyb, které můžeme použít k výpočtu odchylek servomechanismů v ustáleném stavu při daných vstupních signálech. Jestliže například je $\eta_1(t)$ jednotkový skok, je odchylka v ustáleném stavu rovna C_0 .

Koefficienty C_n můžeme určit ze vztahu (184) a přenosu $e(p)/\Phi_1(p)$, který je racionální lomenou funkcí s mnohočlenem $H(p)$ v čitateli a $N(p)$ ve jmenovateli. Definime $H(p)$ mnohočlenem $N(p)$ a koefficienty takto získané řady srovnáme s koefficienty na pravé straně vztahu (184) při stejných mocninách p .

KONTROLNÍ OTÁZKY K 5. KAPITOLE

1. Jak určíte odrezu říenu při daném přenosu?
2. Jakké jsou základní vlastnosti přenosu lineárního členu?
3. Co jsou to nuly a polý přenosu?
4. Jak určíte přenos členu, jehož přechodovou charakteristikou znáte?
5. Odvoďte různé tvary konvolučního integrálu!
6. Jak se matematicky vyjádří princip superpozice?
7. Co je to impulsní a vahová funkce a jak souvisejí s přenosem?
8. Jak se určí odrezu členu na velmi krátké impulsy?
9. Jakými způsoby lze určit frekvencií přenos?
10. Jaký je výsledný přenos členu zařazených za sebou, paralelně, antiparalelně a členni se zpětnou vazbou?
11. Co je to přenos rozpojeného obvodu, celkový přenos, přenos přímé cestou, přenos řízení, přenos poruchy?
12. Co je to přenosnost regulace a jak se nazývá?

LITERATURA K 5. KAPITOLE

- [5.1] Peřidbaum, A. A., Dudykin, A. D., Manovcov, A. P., Mirojubor, N. N.: Teoretické osnovy svazí i upravení. Moskva, Gos. izd. fiziko-mat. lit. 1963
- [5.2] James, H. M., Nichols, N. B., Phillips, R. S.: Theory of servomechanisms. New York—London, Mass. Inst. of Technol., Radiation Laboratory Series, Vol. 25, 1947
- [5.3] Oppelt, W.: Příručka regulaci techniky. Praha: SNTL 1958
- [5.4] Solodovníkov, V. V.: Osnovy avtomatizeskogo regulirovaniya. Gos. nauch. tech. izd. naš. lit., Moskva, 1954
- [5.5] Trnka, Z.: Servomechanismy. Praha: SNTL 1954
- [5.6] Tward, J. G.: Automatic Feedback Control System Synthesis. New York—Toronto—London, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1955

[5.7] James, H. M., Nichols, N. B., Phillips, R. S.: Theory of servomechanisms. New York—London, Mass. Inst. of Technol., Radiation Laboratory Series, Vol. 25, 1947

Frekvenční metody jsou velmi účinným nástrojem analýzy i syntézy regulačních obvodů. Vycházíme přitom ze základních vlastností přenosu, jak byly ukázány v 5. kapitole. Při praktickém řešení používáme různých druhů tzv. frekvenčních charakteristik. Ty umožňují poměrně jednoduché i názorné řešení různých regulačních problémů. Použití frekvenčních charakteristik se neomezuje jen na lineární spojité systémy, ale s jejich pomocí se vyšetřují i impulsní systémy, a dokonce řeší i otázky stability nelineárních systémů. Probereme proto nejprve různé druhy této charakteristik, základní způsoby jejich sestrojení a vztahy mezi nimi.

Frekvenční charakteristika je grafickým zobrazením frekvenčního přenosu

$$F(j\omega) = \frac{X_2(j\omega)}{X_1(j\omega)} = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (187)$$

který jsme v předchozích kapitolách definovali několika způsoby. Jednak jako poměr vektoru sinusového výstupního signálu k vektoru sinusového vstupního signálu vztahem (159), jednak jako poměr Fourierova obrazu výstupního signálu k Fourierovu obrazu vstupního signálu, jednak jako Fourierovu transformaci impulsní funkce. Frekvenční charakteristiku lze také považovat za grafický záznam experimentálně zjištěné amplitudy a fáze výstupního sinusového signálu u ustálém stavu při různém kmitočtu vstupního jednotkového sinusového signálu. Stejně tak jako máme různé definice frekvenčního přenosu, používáme i různých druhů frekvenčních charakteristik. To je dáné tím, že vztah (187) můžeme zobrazen různými způsoby.

6. FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY V KOMPLEXNÍ ROVINĚ

Frekvenční charakteristiku můžeme považovat za primé zobrazení komplexní vzdálenosti (187) v komplexní rovině o souřadnicích $\operatorname{Re}[F(j\omega)]$ a $\operatorname{Im}[F(j\omega)]$.

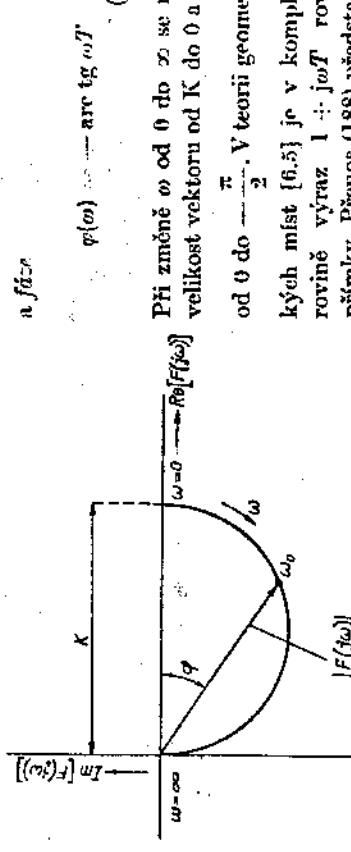
Jestliže uvažujeme *polarní rovnu přenosu* (187), můžeme jej považovat za vektor α amplitudě (velikosti) $|F(j\omega)|$ a fázi $\varphi(\omega)$. Amplituda i fáze tohoto vektoru se mění s kmitočtem ω . Při změně kmitočtu od $\omega = 0$ do $\omega = \infty$ opisuje konec tohoto vektoru křivku, která je frekvenční charakteristikou. Pro člen s přenosem,

$$F(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T^2} \quad (188)$$

je amplituda

$|F(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad (189)$

$I = \operatorname{Im}[F(j\omega)] = |F(j\omega)| \sin \varphi(\omega) \quad (190)$



Obr. 45. Frekvenční charakteristika v komplexní rovině

podle obr. 45. Rovnice této kružnice lze určit také, rozdělme-li přenos (188) na jeho reálnou část

$$R = \operatorname{Re}[F(j\omega)] = \frac{K}{1 + \omega^2 T^2} \quad (191)$$

a imaginární část

$$I := \operatorname{Im}[F(j\omega)] = \frac{K \omega T}{1 + \omega^2 T^2} \quad (192)$$

přičemž platí

$$F(j\omega) := \operatorname{Re}[F(j\omega)] + j\operatorname{Im}[F(j\omega)] \quad (193)$$

Vytoučme-li ω z rovnice (191) a (192), dostaneme

$$\left(R^2 + \frac{K}{2} \right)^2 + I^2 = \left(\frac{K}{2} \right)^2 \quad (194)$$

což je rovnice kružnice se středem v bodě $R = K/2$, $I = 0$.

Pro reálnou část frekvenční charakteristiky můžeme také napsat

$$R = \operatorname{Re}[F(j\omega)] = |F(j\omega)| \cos \varphi(\omega) \quad (195)$$

a pro imaginární část

$$I = \operatorname{Im}[F(j\omega)] = |F(j\omega)| \sin \varphi(\omega) \quad (196)$$

Pak je amplituda přenosu dáná vztahem

$$|F(j\omega)| = \sqrt{R^2 + I^2} \quad (197)$$

a fáze platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I}{R} \quad (198)$$

Na základě vztahu (164) je možno ukázat, že $|F(j\omega)|$ a $\operatorname{Re}[F(j\omega)]$ jsou soude funkce, tj. platí

$$|F(-j\omega)| = |F(j\omega)| \quad (199)$$

$$\operatorname{Re}[F(-j\omega)] = \operatorname{Re}[F(j\omega)] \quad (200)$$

a $\varphi(-\omega)$ a $\operatorname{Im}[F(j\omega)]$ jsou liché funkce, tj. platí

$$\varphi(-\omega) := -\varphi(\omega) \quad (201)$$

$$\operatorname{Im}[F(-j\omega)] = -\operatorname{Im}[F(j\omega)] \quad (202)$$

Frekvenční charakteristiky pro složitější systémy s přenosem typu (142)

$$F(j\omega) = \frac{M(j\omega)}{N(j\omega)} = \frac{b_0 + b_1 j\omega + b_2 (j\omega)^2 + b_3 (j\omega)^3 + \dots}{a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + a_3 (j\omega)^3 + \dots} \quad (203)$$

kde φ_1 je fáza čitatele daná vztahem

$$|F(j\omega)| = \sqrt{\frac{(b_0 - b_1 \omega^2 + \dots)^2 + (b_1 \omega - b_2 \omega^3 + \dots)^2}{(a_0 - a_1 \omega^2 + \dots)^2 + (a_1 \omega - a_2 \omega^3 + \dots)^2}} \quad (204)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b_1 \omega - b_2 \omega^3 + \dots}{b_0 - b_1 \omega^2 + b_3 \omega^4 - \dots} \quad (205)$$

a φ_2 fáze jmenovatele

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{a_1 \omega - a_3 \omega^3 + \dots}{a_0 - a_2 \omega^2 + \dots} \quad (206)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_1 \omega - a_3 \omega^3 + \dots}{a_0 - a_2 \omega^2 + \dots} \quad (207)$$

Můžeme počítat pro různé kmitočty oddělené také reálnou a imaginární část a pak určit přenos podle rovnice

$$F(j\omega) = R + jI = \frac{A + jB}{C + jD} \quad (208)$$

kde

$$A = b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \dots \quad (209)$$

$$B = b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 - \dots \quad (210)$$

$$C = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots \quad (211)$$

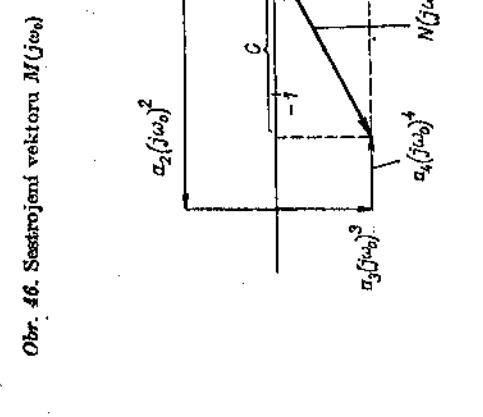
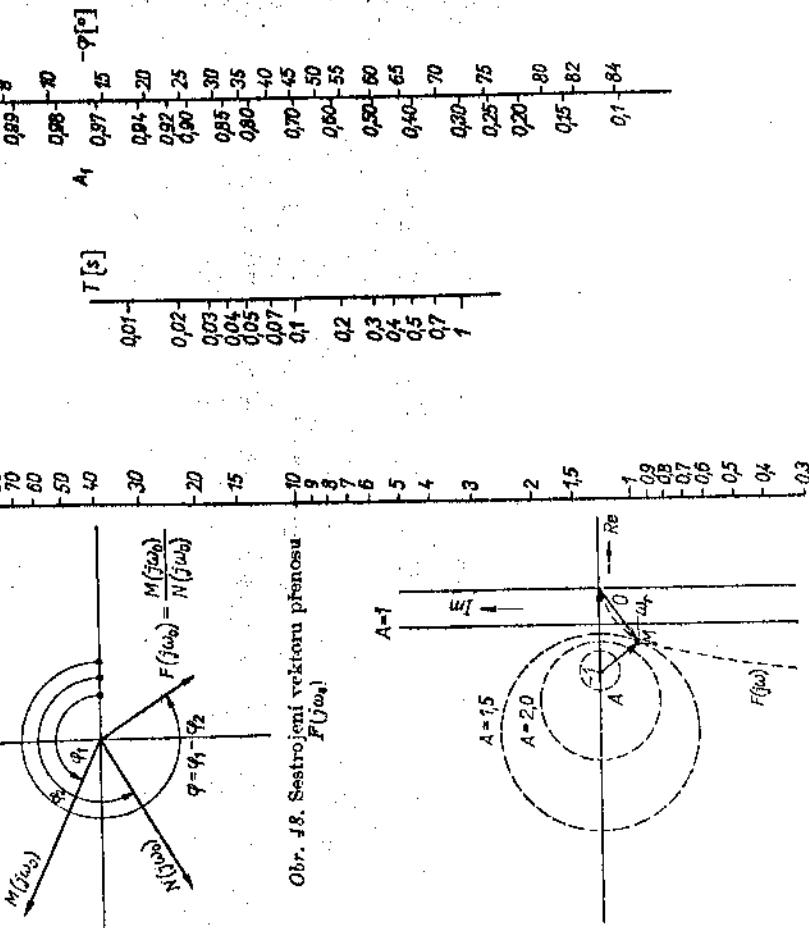
$$D = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots \quad (212)$$

Reálnou a imaginární část pak vypočteme podle vzorce

$$R = \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} \quad (213)$$

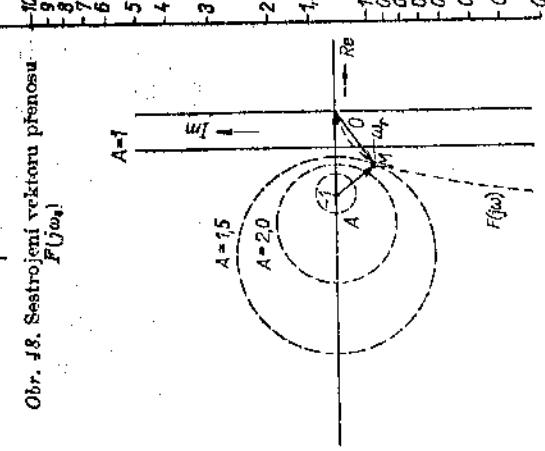
$$I = \frac{CB - AD}{C^2 + D^2} \quad (214)$$

Sestrojení frekvenční charakteristiky často usnadní následující grafický postup. Stanovime graficky komplexní číslo příslušné čitateli ($A + jB$) a kom-



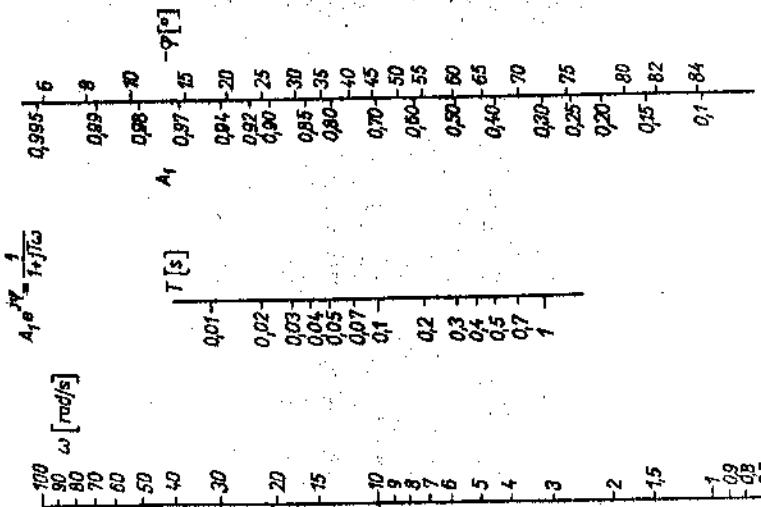
Obr. 47. Sestrojení vektora $N(j\omega_0)$

Obr. 48. Sestrojení vektoru přenosu $F(j\omega_0)$



Obr. 48. Sestrojení vektoru přenosu $F(j\omega_0)$

plexní číslo $M(j\omega_0)$ jmenovatele ($C + jD$). Tato dvě čísla mezi sebou dělme a dostaváme jeden bod frekvenční charakteristiky. Při sestrojování čísel $A + jB$ a $C + jD$ postupujeme tak, že tyto výsledné vektory odpovídají čitateli a jmenovateli výrazu (203) složině z dílčích vektorů, které odpovídají jednotlivým členům mnohočlenu $M(j\omega)$ a $N(j\omega)$. Graficky sestrojený mnohočlen čitatel je nakreslen na obr. 46. Obdobným způsobem sestrojíme mnohočlen jmenovatele. Je na obr. 47. Podél téže osy dvou komplexních čísel pro určitý úhlový kmitočet ω_0 je sestrojen ω_0 .



Obr. 49. Nomogram pro sestrojení frekvenční charakteristiky v komplexní rovině

Sestrojování charakteristik v komplexní rovině usnadní také nemonogram podle obr. 49.

Kromě frekvenčních charakteristik jednodílných členů používáme velmi často při syntéze a při řešení stability tzv. charakteristiky rozpojeného obvodu. Ta je grafickým zázorněním přenosu $F(j\omega)$ definovaného v §. kapitole vztahem (171)

$$A(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)} \quad (215)$$

Frekvenční charakteristika $F(j\omega)$ rozpojeného obvodu se snadněji zjistuje početně i experimentálně než celkový přenos $A(j\omega)$, který může být někdy přenosem řízení, jindy přenosem poruch (viz 7. kap.). Ten však určuje celkové vlastnosti systému (stabilitu, průběh přechodového jevu atd.). Proto byly využívány způsoby určení $A(j\omega)$ ze známého přenosu $F(j\omega)$ rozpojeného obvodu. Jedním takovým způsobem je tzv. Brownova-Campbellova konstrukce podle obr. 59. Amplituda celkového přenosu je dána vztahem

$$|A(j\omega)| = A = \left| \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)} \right| = \frac{|F(j\omega)|}{|1 + F(j\omega)|} \quad (216)$$

Protože vektor OM určuje velikost $|F(j\omega)|$ a vektor AM je $|1 + F(j\omega)|$, je podle (216)

$$\begin{aligned} A &= \frac{\overline{OM}}{\overline{AM}} \\ &= \frac{\overline{OM}}{\overline{AM}} \end{aligned} \quad (217)$$

Sestrojme-li geometrická místa, v nichž je tento poměr stále stejný, dostaneme soustavu křivek podle obr. 50. Ty umožňují k danému průběhu frekvenční charakteristiky sestrojit průběh $A(j\omega)$. Velmi jednoduché je určení maximální amplitudy A_{∞} , které je velmi důležitým ukazatelem jakosti daného regulačního obvodu. Rovnice geometrického místa bodu M , pro které je $A(j\omega)$ konstantní, dostaneme takto. Označíme souřadnice bodu M x a y a dostaneme

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 \quad (218)$$

$$\overline{AM}^2 = (1 - x)^2 + y^2 \quad (219)$$

$$A^2 = \frac{\overline{OM}^2}{\overline{AM}^2} = \frac{x^2 + y^2}{(1 - x)^2 + y^2} \quad (220)$$

Úpravou výrazu (220) dostaneme

$$\left\{ x + \frac{A^2}{1 - A^2} \right\}^2 + y^2 = \frac{A^2}{(1 - A^2)^2} \quad (221)$$

což je rovnice kružnice se středem na reálné ose o souřadnicích

$$x = \frac{-A^2}{A^2 - 1}; \quad y = 0$$

a poloměru

$$r = \sqrt{\frac{A^2}{|A^2 - 1|}}$$

Tuto křivku konstantního poměru A byly sestrojeny i pro logaritmické frekvenční charakteristiky a nazývají se Nicholsovy diagramy; budou uvedeny v 10. kapitole.

6.2. LOGARITMICKÉ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY

Logaritmickou frekvenční charakteristikou dostaneme logaritmováním frekvenčního přenosu (187)

$$\ln F(j\omega) = \ln |F(j\omega)| + j\varphi(j\omega) \quad (222)$$

Využijme zvláště logaritmus amplitud frekvenčního přenosu, který nazýváme *amplitudou logaritmickou frekvenční charakteristikou* a zvlášť fázi jako *fázovou logaritmickou frekvenční charakteristikou*. Na svistou osi amplitudové charakteristiky využijme decibely, což jsou jednotky definované jako dekadický logaritmus poměru výstupního a vstupního signálu násobený dracetí, tj.

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |F(j\omega)| \quad (223)$$

Význam zavedení logaritmických frekvenčních charakteristik spočívá ve zjednodušení výpočtu charakteristik složených obvodů a v jejich jednoduchém sestrojování. Násobení přenosů při řazení členů za sebou se totiž v logaritmických charakteristikách zjednoduší na sečtání charakteristik, protože například pro přenos

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= F_1(j\omega) F_2(j\omega) \dots |F_i(j\omega)| e^{j\varphi_i(\omega)} \\ &\text{platí} \\ \log |F(j\omega)| &= \log |F_1(j\omega)| + \log |F_2(j\omega)| \\ &\dots \\ &+ \log |F_i(j\omega)| \end{aligned} \quad (224)$$

Přenos lineárních členů má v čitateli i jmenovateli mnohočleny, které lze napast jako součiny kořenových činitelů podle (144). Jsou-li všechny kořeny reálné, může mít přenos například tvar

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$$

o směrnici 20 dB na dekádu. Dekáda změnění desetinásobného kmitotet. Pro $\omega = 1/T_1$, platí $20 \log \omega T_1 = 20 \log 1 = 0$. Prochází tedy tato přímka osou 0 dB při kmitotetu $\omega = 1/T_1$. Kmitočtový průběh členů (227) můžeme tedy pro $\omega \ll 1/T_1$, a pro $\omega \gg 1/T_1$ nahradit asymptotami o sklonu 0 dB/dek a 20 dB/dek, jak ukazuje obr. 52. Pro úhlový kmitotet $\alpha = 1/T_1$, je rozdíl mezi skutečným průběhem a approximací asymptotami větší, protože po dosazení jsou výrazky pod odmocninou stejně velké. Zanedbáním kteréhokoli z nich vzniká stejná chyba. Pro tento úhlový kmitotet ($\omega = 1/T_1$) můžeme přímo vyplnit tento rozdíl, tj.

$$20 \log \sqrt{1+1} = 20 \log \sqrt{2} \approx 3 \text{ dB}$$

$$= 20 \log K_0 + 20 \log |1 + j\omega T_1| - 20 \log |1 + j\omega T_2| -$$

$$- 20 \log |1 + j\omega T_3| \quad (225)$$

Fázová charakteristika je

$$\varphi(\omega) = \arctg \omega T_1 - \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_3 \quad (226)$$

Amplitudová logaritmická frekvenční charakteristika se podle (225) snadno sestrojí. První člen $20 \log K_0$ je konstanta nezávislá na kmitotetu. Zobrazuje se tedy přímkou, tak jak je znázorněno na obr. 51. Ostatní členy jsou závislé na kmitotetu. Frekvenční průběh členů

$$20 \log |1 + j\omega T_1| = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \quad (227)$$

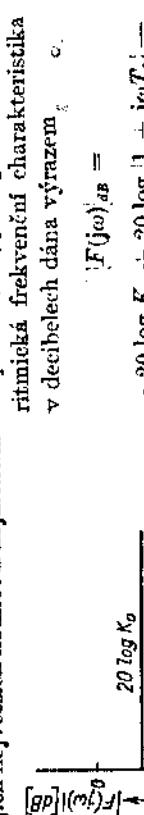
je na obr. 52. Pro $\omega \ll \frac{1}{T_1}$ je člen $(\omega T_1)^2 \ll 1$, a můžeme jej tedy proti jednotce zanedbat. Výraz (227) se pak pro $\omega \ll 1/T_1$, zjednoduší na $20 \log 1 = 0$. Pro tyto kmitotety bude

frekvenční charakteristika rovnoběžná s osou ω ve vzdálenosti 0 dB. Výraz (227) bude pak možno napsat

$$20 \log \omega T_1 = 20 \log \omega + 20 \log T_1$$

Pro $\omega \gg 1/T_1$, je $(\omega T_1)^2 \gg 1$, a můžeme tedy zanedbat jedničku proti $(\omega T_1)^2$. Tento výraz je v souřadnicích $20 \log |F(j\omega)| = [F(j\omega)]_{dB} \approx \log \omega$ dán přímkom

$$F_1(j\omega) = K_0 \frac{(1 + j\omega T_1)}{(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)} \quad (224)$$



Obr. 51. Logaritmická frekvenční charakteristika výrazu $20 \log K_0$

Totéž můžeme ještě určit pro $\omega = \frac{1}{2T_1}$, a dostáváme

$$20 \log \sqrt{1 + 1/4} \approx 1 \text{ dB}$$

Stejným způsobem vypočteme $\frac{1}{T_1}$ přenos pro $\omega = 2 \frac{1}{T_1}$ a dostáváme

$$20 \log \sqrt{1 + 4} \approx 7 \text{ dB}$$

Protože asymptota má v bodě $\omega = 2 \frac{1}{T_1}$ hodnotu

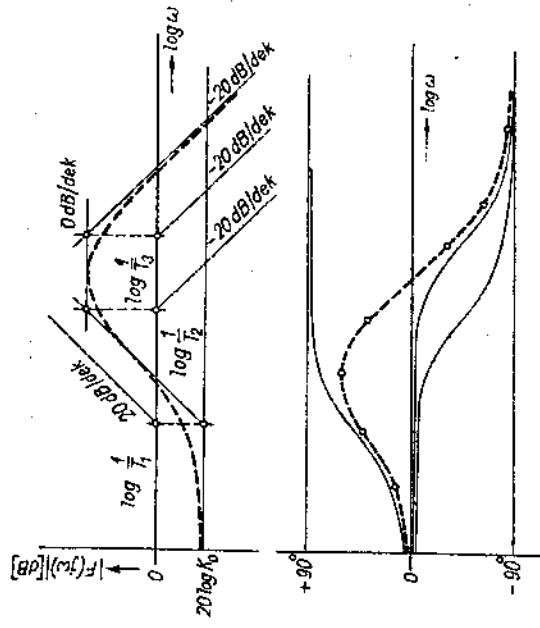
$$20 \log 2 \approx 6 \text{ dB}$$

je rozdíl mezi skutečnou charakteristikou a asymptotou opět 1 dB. Shrnujeme-li předešlý výklad, vidíme, že frekvenční charakteristiku výrazu (227) můžeme dostatečně přesně sestrojit pomocí asymptotických průběhů. Výše uvedenými opravami asymptotických průběhů.

Frekvenční průběh členu je na obr. 53. Rozdíl proti průběhu na obr. 52 je v záporné směrnici asymptoty (—20 dB/dek.)

Výslednou logaritmickou frekvenční charakteristiku přenosu (224) dostaneme jednoduchým sečtením a odečtením výše uvedených dílčích frekvenčních

charakteristik, tak jak to ukazuje obr. 54. Fázovou charakteristiku vynesešme podle vztahu (226). Průběhy fází k jednotlivým amplitudovým charakteristikám jsou přeskleny u příslušných obrazků. Pro snadnější vynášení fází k výše uvedeným průběhům je na obr. 55 tzv. bezrozdílné frekvenční charakteristikám členěni $20 \log \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 T_1^2}}$ a $-20 \log \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 T_2^2}}$.



Obr. 54. Složení výsledného frekvenčního charakteristiky

Jestliže mají mnohoslenný $M(p)$ a $N(p)$ přenosu (203) také komplexně sdružené kořeny, hudem růst $M(j\omega)$ a $N(j\omega)$ při rozkladu kromě členů typu $(1 + j\omega T)$ také členy typu $[1 + 2\alpha T j\omega + (T j\omega)^2]$; nejčastěji pracujeme s převrácenou hodnotou tohoto výrazu, tj. s

$$\frac{1}{(T j\omega)^2 + 2\alpha T j\omega + 1} \quad (229)$$

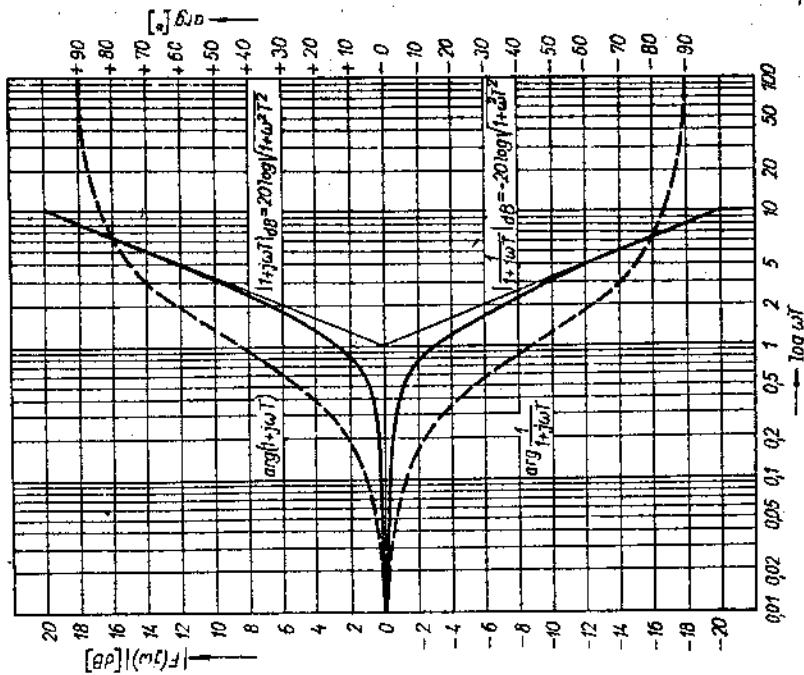
což lze napísat také ve tvaru

$$\left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right] + j2\alpha \cdot \frac{\omega}{\omega_0}$$

kde $\omega_0 := \frac{1}{T}$.

Pro sestrojení výsledné logaritmické frekvenční charakteristiky je třeba umět také jednoduše sestrojit sice frekvenční průběh odpovídající výrazu (229).

To lze pomocí grafu na obr. 56, kde jsou průběhy amplitudy a fáze odpočítávají při sestrojeném hodnotám ω_0 . Při sestrojování asymptotické frekvenční charakteristiky stačí nahradit člen (229) asymptotami o sklonu 0 a 40 dB. Při sestrojování přesného průběhu provedeme potom opravy na skutečné průběhy v okolí úhlového kmitočtu ω_0 podle grafu na obr. 56.



Obr. 56. Bezrozdílné logaritmické frekvenční charakteristiky

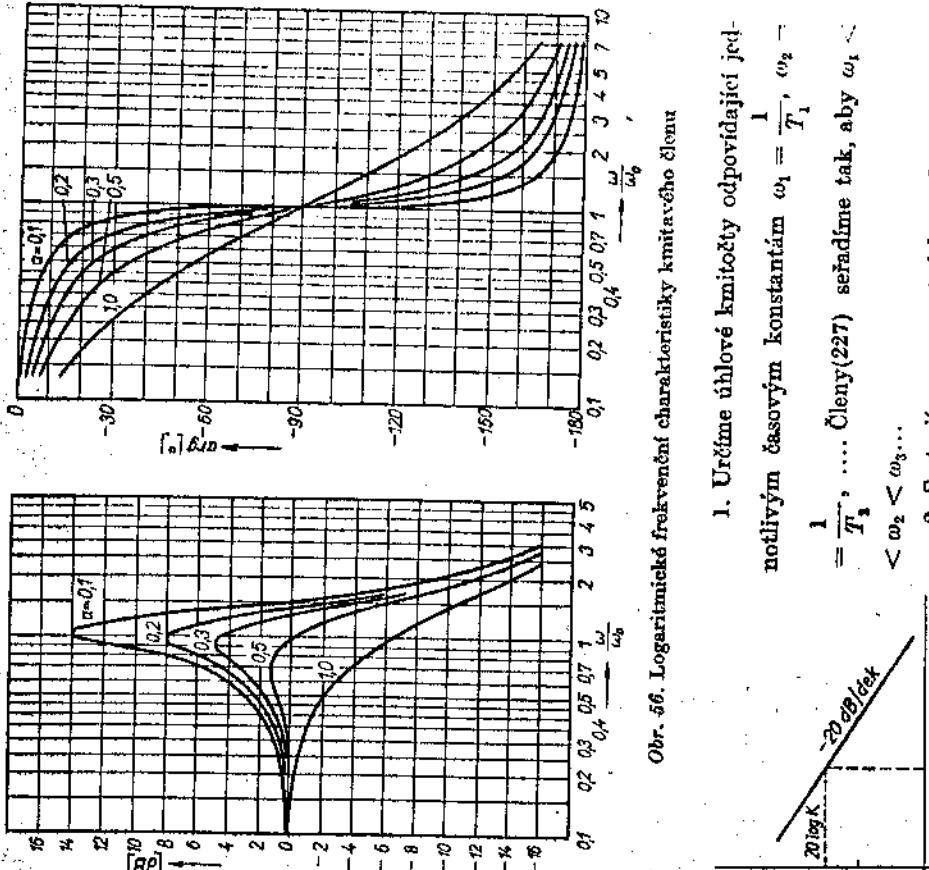
Má-li přenos nulové polý, tj. členy typu $1/j\omega$, odpovídá jim logaritmická frekvenční charakteristika podle obr. 57. Je to přímka o sklonu -20 dB/dek a fáze je konstantní $\eta(\omega) = -\frac{\pi}{2}$.

Logaritmickou frekvenční charakteristikou obecného přenosu ve tvaru (224) i s kvadratickými členy (229) lze jednoduše sestrojovat nasledujícím postupem:

se zvětšuje nebo změnuje vždy o 20 dB/dek podle toho, je-li příslušný člen v čitateli nebo jmenovateli přenosu.

5. Obsahuje-li přenos kvadraticky člen (229), mění se sklon asymptoty při úhlovém kmitočtu $\omega_0 = 40$ dB/dek.

6. Výsledný průběh logaritmické frekvenční charakteristiky se sestrojuje s použitím výše uvedených korekčních pro asymptotické charakteristiky a podle grafu na obr. 56.



Obr. 56. Logaritmické frekvenční charakteristiky kmitavého člena

- Určme úhlové kmitočty odpovídající jednotlivým časovým konstantám $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$, $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$, ... Členy (227) seřadíme tak, aby $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$.
- Sestrojíme asymptotickou charakteristiku. Základne od nejnižších kmitočt. Nenáleží přenos pól v počátku, začná charakteristika s vodorovnou asymptotou (o sklonu 0 dB/dek) posunutou o 20 log K. Máli přenos pól v počátku, začná první asymptota se sklonem —20 dB/dek. Její umístění je dánou tím, že pro $\omega = 1$ musí procházet bodem 20 log K.

- První asymptota pokračuje až do úhlového kmitočtu ω_1 odpovídajícího prvnímu členu (6.32). Od této polohy nová asymptota se sklonem změní o +20 dB/dek nebo —20 dB/dek podle toho, je-li člen $(1 + j\omega T_1)$ v čitateli nebo jmenovateli přenosu.
- Dále pokračujeme v sestrojení jednotlivých asymptot, jejichž sklony

Vyjedneme-li z definice frekvenčního přenosu jako Fourierovy transformace impulsní funkce (164)

$$F(j\omega) = \int_0^\infty g(t) e^{-j\omega t} dt \quad (230)$$

je podle (161)

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (231)$$

a musí platit

$$\int_0^\infty |g(t)| dt < \infty \quad (232)$$

$$g(t) = 0 \quad \text{pro } t < 0 \quad (233)$$

Podmínka (232) existence Fourierovy transformace je současně podmínkou stability systému popsaného uvažovaným přenosem $F(j\omega)$. Vztah (233) se nazývá podmínka fyzikální realizabilitnosti systému a říká, že přehodný jev $g(t)$ nemůže vzniknout dříve, než příslušní vstupní signál $\delta(t)$. Existuje obecné kritérium fyzikální realizovatelnosti frekvenční charakteristiky podle [6.2]. Toto kritérium říká, že nutnou a postačující podmínkou, aby frekvenční přenos měl fyzikální realizaci, je existence integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |F(j\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega$$

Abychom určili vztah mezi reálnou a imaginární částí přenosu $F(j\omega)$, provedeme rovnici (231) takto

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \operatorname{Re}[F(j\omega)] \cos \omega t - \operatorname{Im}[F(j\omega)] \sin \omega t \right\} d\omega + \\ + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \operatorname{Re}[F(j\omega)] \sin \omega t + \operatorname{Im}[F(j\omega)] \cos \omega t \right\} d\omega \quad (234)$$

Protože $g(p)$ je reálnou funkčí, musí být imaginární část na pravé straně vztahu rovna nule. S ohledem na to, že reálná část je sudou funkcí ω , můžeme napsat (234) ve tvaru

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \operatorname{Re}[F(j\omega)] \cos \omega t - \operatorname{Im}[F(j\omega)] \sin \omega t \right\} d\omega \quad (235)$$

Zaměníme-li $-t$ za t a použijeme-li podmínky (233), dostaneme

$$\int_0^{\infty} \left\{ \operatorname{Re}[F(j\omega)] \cos \omega t + \operatorname{Im}[F(j\omega)] \sin \omega t \right\} d\omega = 0 \quad (236)$$

Pro fyzikálně realizovatelné systémy tedy platí úzký vztah mezi jejich reálnou a imaginární frekvenční charakteristikou, tj.

$$\int_0^{\infty} \operatorname{Re}[F(j\omega)] \cos \omega t d\omega = - \int_0^{\infty} \operatorname{Im}[F(j\omega)] \sin \omega t d\omega \quad (237)$$

K určení $g(t)$ k dané frekvenční charakteristice stačí tedy použít jen její reálnou nebo imaginární část. Na tom jsou založena různá řešení přechodných jevů podle daných frekvenčních charakteristik. Platí totiž

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[F(j\omega)] \cos \omega t d\omega \quad (238)$$

$$g(t) = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im}[F(j\omega)] \sin \omega t d\omega \quad (239)$$

Protože v regulační technice častoji používáme přechodových charakteristik $h(t)$ než impulsních charakteristik $g(t)$, napišme souvislost přechodové charakteristiky s frekvenčním přenosem, která je dána vztahem

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega \quad (240)$$

Odobným postupem jako pro impulsní funkci $g(t)$ dospejeme i zde ke vztahu

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}[F(j\omega)]}{\omega} \sin \omega t d\omega \quad (241)$$

Uvedené vztahy jsou základem metod, které se zabývají souvislostmi mezi přechodovými a frekvenčními charakteristikami, jak je probereme v 9. kapitole. Souvislost přechodových a frekvenčních charakteristik vyplývá také z vztahy o limitě uvedené ve druhé kapitole

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p H(p) = \lim_{p \rightarrow 0} F(p) \quad (242)$$

kde bylo použito vztahu (145)

$$H(p) = F(p) - \frac{1}{p} \quad (243)$$

Ustálená hodnota přechodové charakteristiky je tedy dáná počátečním bodem frekvenční charakteristiky ($\omega = 0$). Použitím vztahy o limitě

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p H(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} F(p) \quad (244)$$

určíme, že počáteční hodnota přechodové charakteristiky (pro $t = 0$) je dána koncovým bodem frekvenční charakteristiky (pro $\omega = \infty$). Vztahu (242) a (243) můžeme použít i ke stanovení hodnot derivací přechodové charakteristiky. Je-li derivace přechodové charakteristiky pro $t = 0$ rovna k_1 , pak frekvenční charakteristika končí pro $\omega \rightarrow 0$ kolmo zdola nahoru v podatku souřadnic, protože to odpovídá přenosu $F(p) = k_1/p$ pro $\omega \rightarrow \infty$. Jestliže má příběh přechodové charakteristiky v $t = 0$ vodorovnou tečnu, ale určité němnožné zrychlení [druhou derivaci $h(0) = k_2$] musí končit frekvenční charakteristikou pro $\omega \rightarrow \infty$ v podatku souřadnice vodorovně zleva doprava, protože to podle (242) odpovídá přenosu $F(p) = k_2/p^2$. Takto lze využít důležitou závěry. Platí přitom, že počátek frekvenční charakteristiky odpovídá vždy přechodové charakteristiky pro $t \rightarrow \infty$ a naopak.

Ukažme také vztah mezi amplitudou a fázovou charakteristikou. Dosadíme-li do (236) vztahy (195) a (196), dostaneme

$$\int_0^{\infty} |F(j\omega)| \cos [\omega t - \varphi(\omega)] d\omega = 0 \quad (245)$$

To znamená, že průběh fázové charakteristiky $\varphi(\omega)$ je již pevně dán průběhem amplitudové frekvenční charakteristiky uvažovaného členu.

Bode [6.1] ukázal, že pro určitý krmitočet ω_0 lze fází využít vztahem

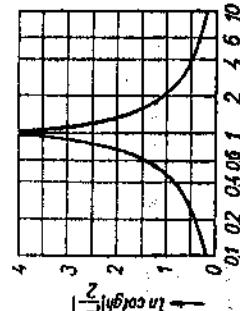
$$\psi(\omega_0) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{dA}{d\mu} \right)_{\mu=\omega_0} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{dA}{d\mu} - \left(\frac{dA}{d\mu} \right)_{\mu=\omega_0} \right] \ln \operatorname{ctgh} \frac{|\mu|}{2} \cdot d\mu \quad (245)$$

členy s přenosem, který nemá v pravé polovině komplexní roviny p žádné polý ani noly. Takový člen má při stejné amplitudové charakteristice nejménší fázový posuv. Příkladem ženou s neminimální fází jsou systémy s dopravním zpožděním, protože u nich se fáze mění se změnou T_d , aniž by se přitom měnila amplitudová charakteristika. Jiným příkladem jsou rizné filtry, na příklad podle obr. 59. Na obr. 60 je frekvenční charakteristika členu s neminimální fází, jehož přenos je

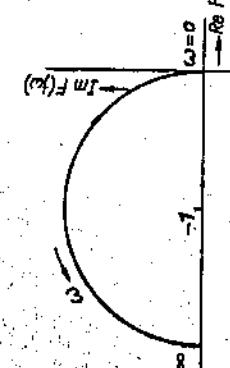
$$u = \ln \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right).$$

$$H = \ln |F(i\omega)|$$

Fáze při libovolném úhlovém kmitočtu ω_0 , tj. $\sigma(\omega_0)$, je podle (245) určena tangentou úhlu sklonu logaritmické amplitudové frekvenční charakteristiky



卷之三



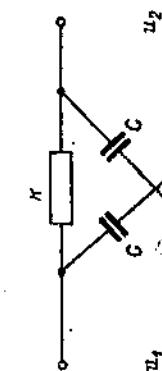
rekvenční charakteristiky

na etgh $\frac{|\mu|}{2}$ ukazuje, že největší změna fáze je v blízkosti bodů, ve kterých se sklon logaritmické amplitudové charakteristiky a že fáze při libovolném zadaném kmitočtu je určena převážně jen změnou sklonu amplitudové charakteristiky v blízkosti tohoto kmitočtu.

2

fáze je v blízkosti bodu, ve kterých se charakteristiky a že fáze při libovolném změněm sklonu amplitudového charakteru.

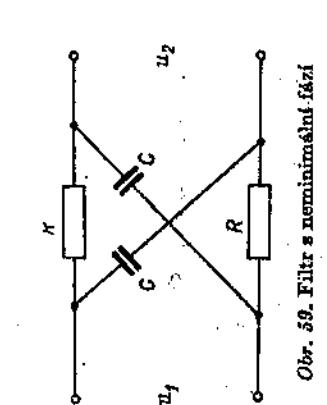
v blízkosti tohoto kmitočtu.



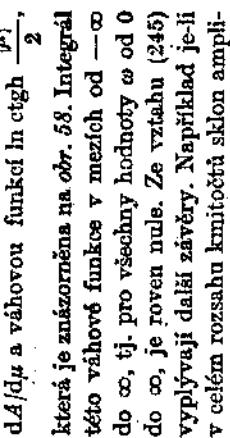
Obz. 59 Filter - neminenimine füüsif

$dA/d\omega$ a výlovou funkcí $\ln \operatorname{ctgh} \frac{|\mu|}{2}$, která je znázorněna na obr. 58. Integrál této výlovy funkce v mezihodnoty ω od $-\infty$ do ∞ , tj. pro všechny hodnoty ω od 0 do ∞ , je roven nule. Ze vzorce (245) vyplývají další závěry. Například je-li v celém rozsahu kmitotu sklon ampli-

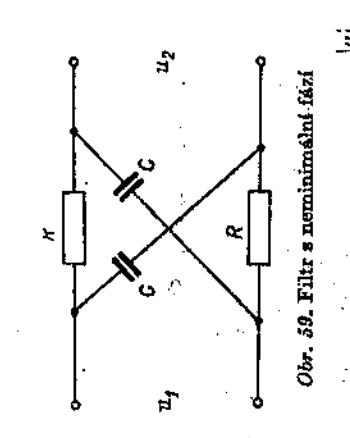
vyplývají další závery. Například je-li v celém rozsahu kmitočtu sklon amplitudové frekvenční charakteristiky n. 20 dB/dék, je fáze stále konstantní



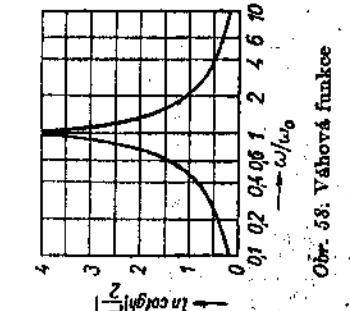
Obz. 59 Filter - neminenimine füüsif



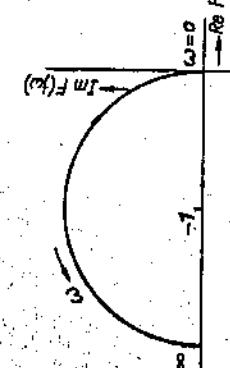
卷之三



卷之三



卷之三



rekvenční charakteristiky

podle obr. 61, který platí pro (189). Stačí k úplnému popisu vlastnosti členů, které patří mezi výše definované filtry s minimální fází.

$$\varphi(\omega) = \arg F(i\omega)$$

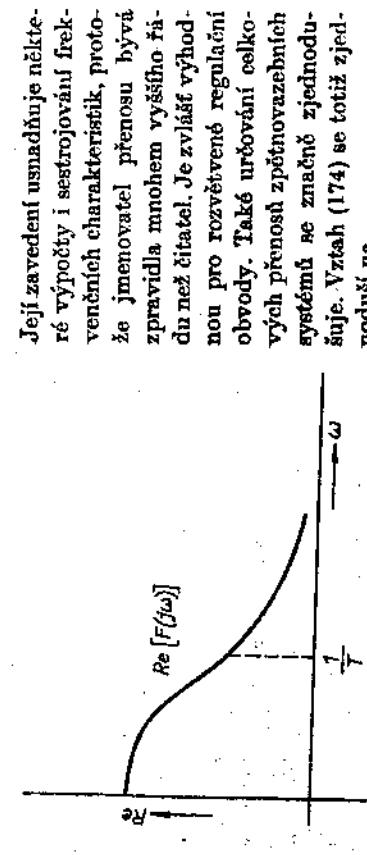
Pro přenos (188) je znázorněna na obr. 62. Uzívaje fázový posuv mezi knity na vstupu a vstupu daného členu. Charakterizuje zpoždění výstupního signálu za vstupním signálem.

Reálná a imaginární frekvenční charakteristika, které jsme definovali již dříve, mají význam při řešení některých speciálních otázek (například při hledání souvislostí mezi přechodovými a frekvenčními charakteristikami).

Pro přenos (188) jsou na obr. 63 a 64.

Inverzní frekvenční charakteristika je grafickým zobrazením tzv. inverzního přenosu

$$F^{-1}(j\omega) = \frac{1}{F(j\omega)} \quad (246)$$



Obr. 63. Reálná frekvenční charakteristika

$$A^{-1}(j\omega) = \frac{1}{F_1(j\omega)} + F_2(j\omega) \quad (247)$$

Pro přímou zpětnou vazbu je $F_2(j\omega) = 1$ a vztah (247) bude

$$A^{-1}(j\omega) = \frac{1}{F_1(j\omega)} + 1 \quad (248)$$

Při použití inverzní frekvenční charakteristiky v komplexní rovině to znamená jednoduché určení celkového přenosu posuvením imaginární osy o jedničku vlevo v charakteristice inverzního přenosu rozpojeného obvodu. To je naznámeno na obr. 65. Kterého druhu frekvenční charakteristiky máme použít, závisí na tom, jaká úloha má být řešena. Rozhodnutí pro inverzní přenos nebo jiný druh charakteristiky proto závisí na zkušenosti.

Frekvenční charakteristiky při modulovaných střídavých signálech mají v regulační technice a zvláště v servomechanismech zvláštní význam, protože

se používá střídavých zeshoražů, servomotorů i jiných členů, kterými se přenáší střídavé sinusové signály, které jsou amplitudově modulované. Je-li nosný střídavý signál $\cos \omega_0 t$ a modulační signál $x(t)$, je amplitudově modulovaný střídavý signál $x^*(t)$ dán výrazem

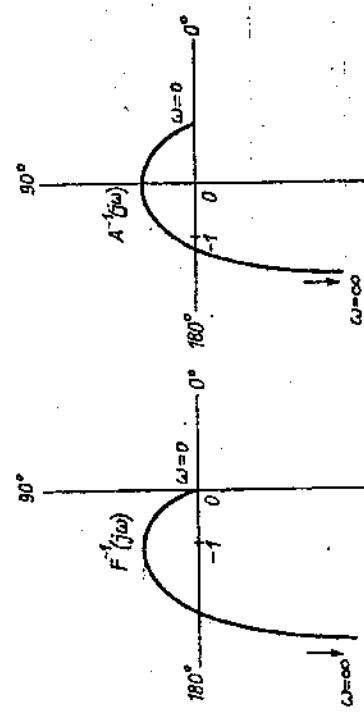
$$x^*(t) = x(t) \cos \omega_0 t \quad (249)$$

Předpokládejme takový modulovaný signál na vstupu nějakého člena, tj.

$$x_1^*(t) = x_1(t) \cos \omega_0 t \quad (250)$$

a na výstupu tohoto člena také modulovaný signál

$$x_2^*(t) = x_2(t) \cos \omega_0 t \quad (251)$$



Obr. 64. Imaginární frekvenční charakteristika

Jelikož zaveden usnadňuje některé výpočty i sestrajovalní frekvenční charakteristiky, protože jmenovatel přenosu hývá zpravidla mnohem výššího rádu než čítač. Je zvláště vhodné pro rozvedené regulační obvody. Také učování cestkových přenosů zpětnovazebních systémů se značně zjednoduší. Vztah (174) se totiž zjednoduší na

$$X_2(p) = F(p) X_1(p) \quad (252)$$

kde $F(p)$ je požadovaný přenos daného člena. Je-li $X_1(p)$ Laplaceův obraz signálu $x_1(t)$, můžeme určit obraz k $x_1^*(t)$

$$X_1^*(p) = \frac{X_1(p - j\omega_0) + X_1(p + j\omega_0)}{2} \quad (253)$$

což představuje cosinusový průběh výjádřený součtem exponenciál s použitím vztahu (21).

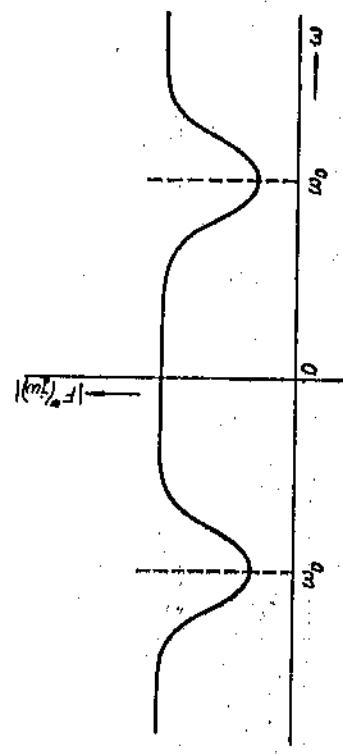
Stejným způsobem pro výstupní signál (251) napišeme jeho obraz

$$X_2^*(p) = \frac{X_2(p - j\omega_0) + X_2(p + j\omega_0)}{2} \quad (254)$$

Dosadime do (254) za $X_1(p)$ výraz (252) a určeme přenos členu pro střídavý modulovaný signál

$$F^*(p) = \frac{X_2^*(p)}{X_1^*(p)} = \frac{F(p - j\omega_0)X_1(p - j\omega_0) + F(p + j\omega_0)X_1(p + j\omega_0)}{X_1(p - j\omega_0) + X_1(p + j\omega_0)} \quad (255)$$

Vidíme, že tento přenos závisí také na vstupním signálu $x_1(t)$, a nelze tedy uskutečnit ideální střídavý člen, který by realizoval stejný přenosové vlastnosti pro modulační signál jako pro stejnosměrný signál. To je důvodem obtížných výpočtů střídavých korekčních členů než členu stejnosměrných.



Obr. 65. Amplitudová frekvenční charakteristika střídavého korekčního členu

Abychom usnadnili řešení, uvažujeme frekvenční přenos k (255), tj.

$$F^*(j\omega) = \frac{F[j(\omega - \omega_0)]X_1[j(\omega - \omega_0)] + F[j(\omega + \omega_0)]X_1[j(\omega + \omega_0)]}{X_1[j(\omega - \omega_0)] + X_1[j(\omega + \omega_0)]} \quad (256)$$

Protože modulační signál má ve svém spektru složky s kmitočty vyššími než je nosný kmitočet ω_0 málo vyjadřeny, můžeme napsat

$$\begin{cases} X_1[j(\omega - \omega_0)] = 0 & \text{pro } \omega > 0 \\ X_1[j(\omega - \omega_0)] = 0 & \text{pro } \omega < 0 \end{cases} \quad (257)$$

Dosadime-li tyto rovnice (257) do vztahu (256), dostaneme

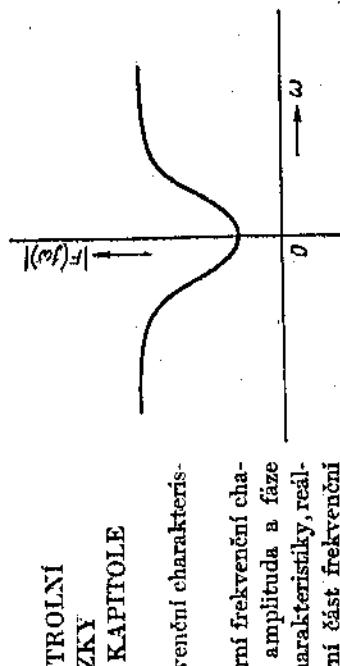
$$F^*(j\omega) = \begin{cases} [F[j(\omega - \omega_0)] & \text{pro } \omega > 0 \\ [F[j(\omega + \omega_0)] & \text{pro } \omega < 0 \end{cases} \quad (258)$$

Tím se přenos zjednoduší na vztah (258), který již nerávni na vstupním signálu x_1 . Rovnice (258) ukazuje, že požadovaný přenos dostaneme posunutím

LITERATURA K 6. KAPITOLE

- [6.1] Bode, H. W.: Network Analysis and Feedback Amplifier Design (Analýza obvodů a návrh zpětnovazebních zesilovačů). New York, D. Van Nostrand Co., 1945
- [6.2] Fettbaum, A. A., Dudykin, A. D., Mironov, A. P., Mirolyubov, N. N.: Teorijsko-tekhnicheskie osnovy svjazi i upravlenija. Moskva, Gos. izd. fiziko-mat. lit. 1963

přenosu $F(j\omega)$ pro stejnosměrný signál o ω_0 v obou směrech podél osy fázových kmitočtů. To například znamená, že frekvenční charakteristika střídavého korekčního členu musí mít průběh podle obr. 66, má-li jeho přenos odpovídat přenosu stejnosměrného členu s charakteristikou podle obr. 67. Tam je amplitudová charakteristika tzv. derivativní korekčního členu.



1. Co je to frekvenční charakteristika?

Obr. 67. Pořadový průběh amplitudové frekvenční charakteristiky derivativního člena

2. Co je to polární frekvenční charakteristika, amplituda a fáze

3. Jak se sestrojí frekvenční charakteristiky rozpojeného obvodu?

4. Jak se sestrojí frekvenční charakteristika uzavřeného obvodu z charakteristiky rozpojeného obvodu?

5. Jak se sestrojí amplitudová logaritmická frekvenční charakteristika?

6. Jak se sestrojí fázová frekvenční charakteristika?

7. Co je to asymptotická charakteristika a jaké jsou korekce pro skutečný průběh?

8. Co je to podmínka fyzikální realizovatelnosti systému?

9. Jaká je souvislost mezi reálnou a imaginární částí frekvenční charakteristiky?

10. Jaká je souvislost mezi amplitudovou a fázovou charakteristikou?

11. Jaká je souvislost mezi přechodovou a frekvenční charakteristikou?

12. Co je to filtr s minimální fází?

13. Co je to inverzní frekvenční charakteristika?

14. Jak je možno realizovat požadovanou charakteristiku při modulovaných signálech?

- [6.3] Oppelt, W.: Příručka regulační techniky. Praha: SNTL 1958
 [6.4] Trnka, Z.: Servomechanismy. Praha: SNTL 1954.
 [6.5] Trnka, Z.: Teoretická elektrotechnika I. Praha: SNTL 1954.
 [6.6] Trussat, J. G.: Automatic Feedback Control System Synthesis. New York—Toronto—London, McGraw-Hill Book Company, INC., 1955

7. PŘENOSY A CHARAKTERISTIKY ZÁKLADNÍCH ČLENŮ, SOUSTAV A REGULÁTORŮ

Lineární regulační obvod je sestaven z jednotlivých členů, jejichž dynamické vlastnosti jsou dány přenosy. Základní tvar tétoho přenosu je pro lineární systémy uveden v předchozích kapitolách, například (144), který můžeme také napsat ve tvaru

$$F(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{K_0 + K_1 p + K_2 p^2 + \dots}{1 + T_1 p + T_2^2 p^2 + T_3^3 p^3 + \dots} \quad (259)$$

kde K_0, K_1, K_2 jsou konstanty, které mají rozdíl času a tedy význam časových konstant.

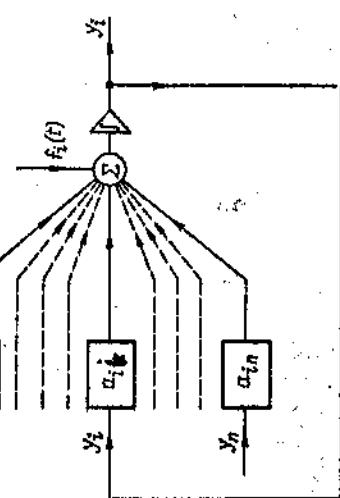
Tento přenos plně popisuje dynamické vlastnosti a je k danému členu jediný, což znamená, že členy mající stejný přenos mají i stejně chování nezávisle na jejich konstrukčním provedení. Syntézu i analýzu regulačních obvodů podstatně usnadní, rozdělitme-li všechny lineární členy do několika "malých" základních skupin. Každá skupina bude charakterizována tím, že má stejný typ přenosu, tj. i stejně dynamické vlastnosti. Toto rozdělení členů umožní při syntéze výjernu zaměřovat členy různého provedení (pneumatické, hydraulické, elektrické, elektromechanické), přičemž však zůstanou zachovány prenosové vlastnosti tak, jak je to třeba pro splnění určitého předepsaného regulačního úkolu.

Znázornime-li přenos (259) jako frekvenční charakteristiku, je zřejmé, že členy s p v čitateli natažejí fázi v kladném smyslu (fázový předstih), a členy s p ve jmenovateli představují natočení fáze v záporném smyslu (fázové zpoždění). Podle toho se členy rozdělují na dvě základní skupiny: *členy předsilové a členy zpoždějící*. Vvláštěním případem je člen, jehož přenos je konstantou K_0 , což znamená, že výstupní signál je přímo úměrný vstupnímu signálu a zanedbává se případné zpoždění nebo zkreslení signálu. Takový člen se nazývá *proporcionální*. Je-li vztah konstant v čitateli a jmenovateli

přenosu (259) takový, že lze přenos pokládat za úměrny p nebo $1/p$, nazýváme

takové členy *derivacemi* nebo *integracemi*. Podle vět Laplaceovy transformace, využívaných ve druhé kapitole, jsme viděli, že násobení operátorem p nebo $1/p$ znamená derivaci nebo integrál daného průběhu.

Kromě členů popsaných přenosem (259) patří mezi lineární také členy *s dopravním zpožděním*, jejichž přechodové charakteristiky jsou podle obr. 19. Jejich přenos je transcendentalní, protože člen $e^{-\tau_{dp}}$, jak vyplývá z věty o posunutí signálu v Laplaceové transformaci. Členy popsané nelineárními diferenciálními rovnicemi nazýváme *nelineárními*. S těmito se seznámíme ve druhém díle knihy. Zde uvedeme přehled členů lineárních.



Obr. 68. Zapojení řetězu bloku obecného systému

rovnici *ntého* řádu je totiž možno nahradit tzv. kanonickou soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k + f_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (260)$$

kde y_i jsou souřadnice, které lze volit dosti libovolně, konstanty a_{ik} závislé na volbě souřadnic y_i , $f_i(t)$ dané vstupní signálny.

Jestliže volime y_i tak že $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$, $y_3 = \ddot{x}$, ..., $y_n = x^{(n-1)}$, tvoří y_i souřadnice tzv. fázového prostoru.

Označme

$$z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} y_k + f_i(t) \quad (261)$$

Pak lze soustavu (260) napsat ve tvaru

$$\frac{dy_i}{dt} = z_i \quad (262)$$

Rovnice (262) představuje lineární rovnice integračních členů, které mají na výstupech signály y_i a na výstupech z_i . Rovnice (261) představují součtové členy, na jejichž výstupech jsou signály z_i a na výstupech signály $a_{ik} y_k$ a vnitřní signály $f_i(t)$ (a_{ik} jsou zesilovači se vstupními signály y_k). Je tedy možno libovolný lineární systém popsaný soustavou (260) znázornit blokovým schématem obsahujícím jediný zesilovač, integrátory a součtové členy. Zapojení řetězu bloku do tohoto schématu je na obr. 68. Tento způsob vytváření blokových schémat je zakládem modelování regulacích problémů analogovými počítači. V regulaci technice dáváme však přednost dělení obvodu na základní členy podle přenosu (259), a proto je v dalším souhrnu uvedeme i s jejich přenosy a charakteristikami.

7.1. PŘENOSY A CHARAKTERISTIKY NEJDŮLEŽITĚJSÍCH ČLENŮ REGULAČNÍCH OBVODŮ

Při analýze a syntéze regulačních obvodů používáme nejčastěji metody operátorových přenosů a frekvenčních charakteristik. Člen regulačního obvodu na obr. 69 je plně určen svým přenosem (259). Abychom si při popisu členů jedné skupiny přehledně vyzádrí různé způsoby popisu jejich dynamických vlastností, bude me v dalším uvádět vždy přehledné tabulky, ve kterých bude pro každou charakteristikou skupinu uvedena diferenční rovnice člena, operátorový přenos, frekvenční charakteristika, přechodová charakteristika a příklady provedení jednotlivých členů.

Proporcionální člen (tab. 4) je takový, u kterého je vždy výstupní signál primu úměrný signálu vstupnímu a přitom se změny vstupu přenáší na výstup okamžitě bez zpoždění. To je zřejmé i z uvedených příkladů. Např. u odporového délce platí vždy

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_1 \quad a \quad \frac{U_2}{U_1} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} = K_0$$

Zpoždjující člen jsou takové, které způsobují při príchodu signálu určitá zpoždění. Například přivedeme-li na vstup sinusový signál, pak sinusovka na výstupu je fazově zpožděna vzhledem ke vstupu. Také na přechodové charakteristice téchto členů vidíme, že výstup nesleduje vstupní signál (skok) okamžitě, ale s určitým zpožděním.

Zpoždjující členy prvního řádu jsou s příklady a popisem dynamických vlastností přehledně uvedeny v tab. 5.

Tabelka 5. Dynamické vlastnosti a příklady proporcionalního členu

Dynamické vlastnosti	Příklady provedení
Diferenciální rovnice	$x_2 = K_0 x_1$
Přenos	$F(p) = K_0$
Přechodová charakteristika	
Frekvenční charakteristika	
Frekvenční charakteristika log souf.	

Tabelka 6. Dynamické vlastnosti a příklady proporcionalního členu se zpožděním prvního řádu

Dynamické vlastnosti	Příklady provedení
Diferenciální rovnice	$T_f x'_2 + x_2 = K_0 x_1$
Přenos	$F(p) = \frac{K_0}{T_f p + 1}$
Přechodová charakteristika	
Frekvenční charakteristika	
Frekvenční charakteristika log souf.	

Zpoždějící členy druhého řádu jsou uvedeny v tab. 6. U příkladu regulace generátoru napěti budíce se zřejmě uplatňují dvě časové konstanty, a to jak v buzení budíce, tak také v buzení generátorem. Takovouto soustavu si lze představit jako dva za sebou zapojené členy prvního řádu. Kofeny charakteristické rovnice jsou pak reálné. Takovým členům se také někdy říká *dvoukapacitní členy*. Frekvenční charakteristiky dvou jednokapacitních členů, tedy dvou polokružnic ležících v jednom kвadrantu komplexní roviny. Obecně však zpoždějící člen druhého řádu může mít i kořeny komplexní. Frekvenční charakteristiky proto mohou mít různé průběhy, tak jak je naznačeno v tab. 6. Abychom mohli snadno sestrojit různé charakteristiky složitějších členů, přepíšme člen tvaru

$$(263)$$

$$(264)$$

kde $\frac{\omega_0}{\alpha_0}$ je tzv. poměrný úhlový kmitočet,
 n činitel tlumení.

Tabuľka 6. Dynamické vlastnosti a príklady zpoždjujúcich členov druhého řadu

Rád členů je dán rádem nejryšší derivace (rovnice (265)), tj. nejryšší možnosti pro jmenovateli přenosu (266). Jestliže mnohcílemu ve jmenovateli odpovídají reálné koeficienty, je možné napsat přenos ve tvaru

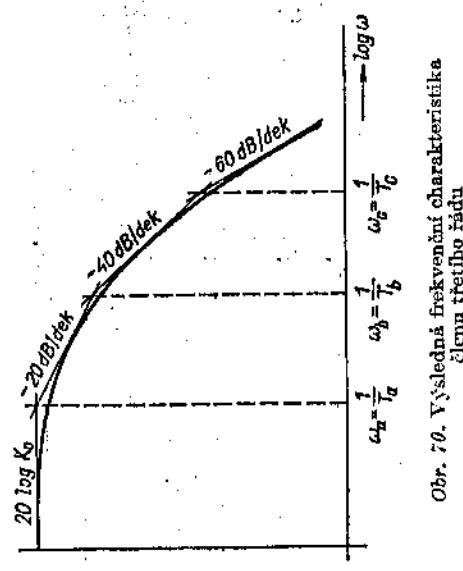
$$F(p) = \frac{K_0}{1 + T_b p + T_b^2 p^2 + T_b^3 p^3} = \frac{(1 + T_b p)(1 + T_b^2 p)}{K_0} \quad (267)$$

三

$$T_1 = T_s + T_b + T_e; \quad T_2^2 = T_s T_b + T_b T_e + T_e T_s; \quad T_3^3 = T_s T_b T_e.$$

Z takového vyjádření vidíme, že výsledný přenos je v takovém případě dán souběžně dlečích přenosů typu $\frac{1}{1 + T_p}$. Výsledná frekvenční charakteristika je tedy

dy dána součinem frekvenčních charakteristik zpoždějících členů prvého řádu, které cílc leží v jednom kvadrantu, viz tab. 5. Frekvenční charakteristika dvou v řadě zapojených zpoždujících členů prvého řádu musí potom procházet dréma kvadranty. Obecně prochází frekvenční charakteristika toliku kvadranty, kolikatá je nejvyšší mocnina proměnné p ve jmenovateli. V případě, že máme přenos dán ve tvaru součinu jednotlivých



Obr. 70. Výsledná frekvenční charakteristika členu třetího řádu

Vztahy mezi konstantami T_1 , T_2 a ω_0 jsou uvedeny v tab. 6. Pro $a > 1$ jsou kořeny polynomu ve jmenovateli (263) reálně různé a přenos je pak jednoduše vyjádřen jako součin dvou přenosů zpoždujících členů prvého řádu.

Zpoždující členy vyšších řádů. V dalším uváděme souhrnné charakteristiky vlastnosti členů výšších řádů. Diferenciální rovnice pro takové členy

vých přenosu, sestrojí se velmi jednoduše výsledná logaritmická frekvenční charakteristika. K dalším přenosům jednotlivé sestrojíme frekvenční charakteristiky a jednotlivé dílčí frekvenční charakteristiky potom sečteme, tak jak je to naznačeno pro přenos (267) na obr. 70.

Jedná sa o významného člena rodu, ktorého meno je možno rozložiť na súčin závorek typu $(1 + Tp)$ a je tiež uvažovat

Integrovaný člen je zvláštním případem zpoždovacího členu. Popis jeho dynamických vlastností je přehledně uveden v tab. 7. Každý realizovaný integrační obvod má vnitřní seřaďovací (hmotný, indukčnosti, kapacit). Tato se potom

$$F(p) = \frac{K_0}{1 + T_{2,0}^{-1} \cdot T_{2,2}^{-1} \cdot T_{3,3}^{-1}} \quad (266)$$

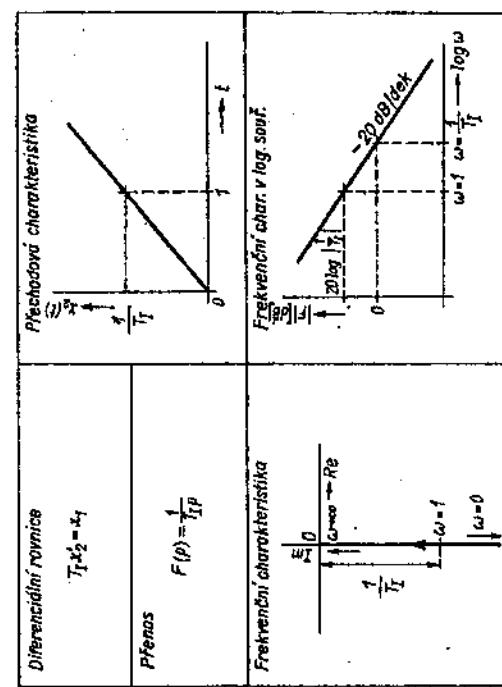
nutně uplatní tak, že ve jmenovateli přenosu bude ještě jeden nebo více členů $(1 + T_1 p)$. Skutečný integrační člen má pak např. přenos

$$F(p) = \frac{1}{T_1 p (1 + T_1 p)} \quad (268)$$

což je vlastně nedokonalý integrační člen se zpožděním.

Integrační člen se zpožděním je s příklady a s popisem dynamických vlastností uveden v tab. 8. Tento člen se bude blížit ideálnímu integračnímu členu, jestliže časová konstanta T_1 bude velmi malá. Potom pro velkou oblast p bude

Tabuľka 7. Dynamické vlastnosti ideálního integračního členu



výraz $T_1 p \ll 1$ a celý přenos se bude blížit tváru $F(p) = \frac{1}{T_1 p}$, což je přenos ideálního integračního členu. V uvedeném příkladě integračního motorku je $T_1 = \frac{J}{B}$, což znamená, že chceme-li se přiblížit k ideálnímu integračnímu členu, musí být moment setrváčnosti motorku co nejménší a konstanta tlumení motora B co největší.

Za integrační člen lze za určitých předpokladů také považovat zpožděující člen prvého rádu s přenosem $F(p) = \frac{1}{T_1 p + 1}$. Zvolíme-li správnou hodnotu T_1 , potom můžeme říci, že pro kmitočty vyšší než $\frac{1}{T_1}$ je takový obvod přibližně integrační. Pro korekci chyb v ustálených stavech mají význam hlavně integrální členy integrující pro $t \rightarrow \infty$.

chodové charakteristiky k čehož členu, jak ukazuje obr. 71. Vídeme, že pro malá t a malé hodnoty x_1 jsou si přechodové charakteristiky těchto členů velmi blízké. Podobně lze porovnat i frekvenční charakteristiky těchto členů, tak jak jsou

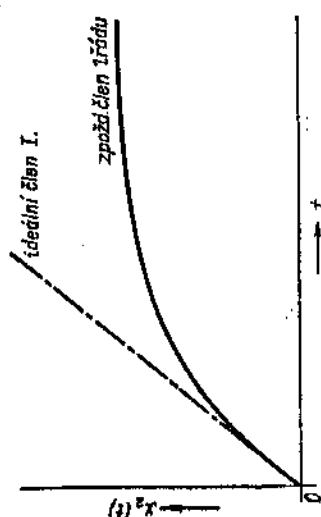
Tabuľka 8. Dynamické vlastnosti integračního členu se zpožděním

	Dynamické vlastnosti	Příklady provedení
Diferenciální rovnice	$T_1 x_2' + T_1 x_2 = x_1$	
Přenos	$F(p) = \frac{1}{T_1 p (1 + T_1 p)}$	
Přechodová charakteristika		
Frekvenční charakteristika		
Přechodová char. v log-log skálách		

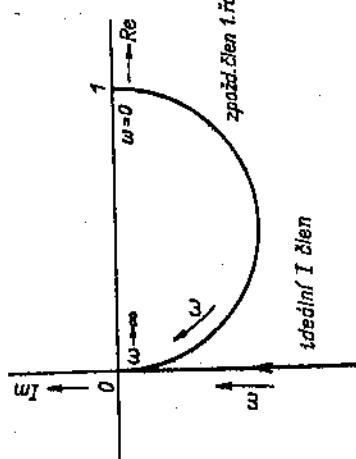
nakresleny na obr. 72. Vídime, že frekvenční charakteristiky v okolí počátku (tedy pro vyšší kmitočty) se k sobě značně blíží. Zvolíme-li správnou hodnotu T_1 , potom můžeme říci, že pro kmitočty vyšší než $\frac{1}{T_1}$ je takový obvod přibližně integrační. Pro korekci chyb v ustálených stavech mají význam hlavně integrální členy integrující pro $t \rightarrow \infty$.

Cleny s dopravnim zpozdenim

Jsnou to takové členy, u nichž se začnou projevovat změny aktuální veličiny až po určitá dobu, po uplynutí tzv. dopravního zpozdení T_d . To je dánou tím, že je potřeba určitá doba k tomu, aby se informace ze vstupu přenesla na výstup, kde se však potom objeví nezkreslena. Tato doba je např. dáná konečnou rychlostí dopravního pásu nebo rychlostí proudění kapaliny v potrubí. Konstanta ζT_d se nazývá dopravní zpoždění a přenos.



Obr. 71. Srovnání přechodové charakteristiky integrativního člena s zpožděním člena prvního rádu



Obr. 72. Srovnání frekvenční charakteristiky integrativního člena s zpožděním člena prvního rádu s přechodovou charakteristikou člena s zpožděním T_d . To tedy známe, že dynamické vlastnosti se podobají zpoždějícím členům vysího rádu tím, že se pro rostoucí kmitočty ovliví kolejem potíží souřadnic. To lze vidět, že se pro rostoucí kmitočty takového člena budou blízké vlastnosti zpoždějícího člena vysího rádu. Toho se skutečně také využívá k tomu, že se členy vysího rádu nahrazují členem s přenosem

$$F(p) = \frac{e^{-T_d p}}{(1 + T_d p)}$$

Tento přenos nám někdy podstatně zjednoduší výpočty, zvláště pokud vychází z přechodové charakteristiky, která je potom jednoduše charakterizována dopravním zpožděním T_d a časovou konstantou T_1 .

Tabulka 9.

Dynamické vlastnosti a příklady členů s dopravním zpožděním

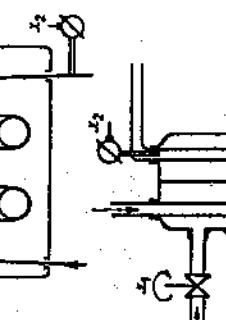
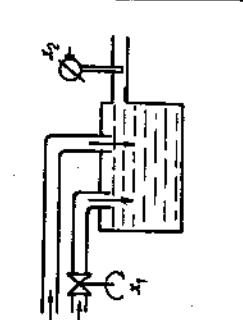
Dynamické vlastnosti	Příklady prodejní
Diferenciální rovnice $x_2 = x_1(t - T_d)$	Difukové topení
Přenos $F(p) = e^{-T_d p}$	
Přechodová charakteristika	
Frekvenční charakteristika	

Derivační člen se nazývá také přezhlížový, protože derivace daného signálu v nějakém okamžiku nám dává informaci o tom, jak bude tento signál přiblížen pokračovat v nejbližším následujícím okamžiku. Také podle frekvenční charakteristiky výstupní signál takového člena fázově předchází vstupní. Častěji někdy však nazveme vstavu derivací člen, protože i kromě vstupní

zpravidla využává derivaci signálu. Dynamické vlastnosti takovýchto členů jsou souhrnně popsány v tab. II.

Derivační člen je zpožděný. Protože ideální derivaci není možné realizovat, setkáváme se u derivacích členů vždy s určitým zpožděním. Jak se mění

Tabuľka 19. Dynamické vlastnosti a příklady členů s dopravním zpožděním kombinovaným se zpožděním prvního řádu

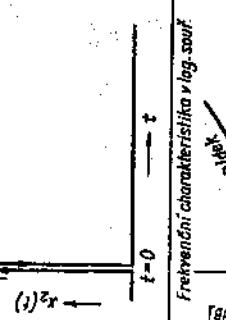
Dynamické vlastnosti	Příklady provedení
Diferenciální rovnice	$\dot{x}_2' + x_2 = x_1(t - T_0)$
Přenos	$F(p) = \frac{e^{-T_0 p}}{(1 + T_0 p)}$
Přechodová charakteristika	
Frekvenční charakteristika	
Frékvenci char. v log. souřad.	

člen. Podíváme se na přechodovou charakteristiku, vidíme, že při skokovém vstupu se objeví výstupní signál, který se podobá požadované idéální přechodové charakteristice derivacího členu.

Kombinované členy

Kromě výše uvedených základních typů členů (zpoždujících, s dopravním zpožděním a předstihovými) mohou mít pochopitelně členy ohrovou i nejobernější tvar přenosu. Tak např. některé tepelné soustavy mohou mít přenosy

Tabuľka 11. Dynamické vlastnosti ideálního derivacního členu

Diferenciální rovnice	Přechodová charakteristika
$x_2 = K_T x_1'$	
Přenos	$F(p) = K_T p$

s derivačními složkami [7.1]. Přesobí-li totiž dva zpoždující členy paralelně, mohou výsledný přenos napsat ve tvaru

$$F(p) = \frac{1}{(1 + T_1 p)} + \frac{1}{(1 + T_2 p)} = \frac{2 + (T_1 + T_2)p}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} \quad (270)$$

Ačkoliv se zde v čitateli vyskytuje derivacní složka ($T_1 + T_2$)p, neznamená to, že se ve frekvenční charakteristice musí objevit fázový přesťah. Vliv zpoždujících členů využává totiž vliv derivacního členu v čitateli. Tato rovnice nemůže pak vyjádřit předstihující fázové úhly.

Člen s kombinovanými přenosy se velmi často používá jako korekční člen v regulačorech nebo funkčních členech v servomechanismech. Derivační charakteristika těchto členů je dán tím, že frekvenční charakteristika pro určitou oblast krmitočtu ($\omega \rightarrow 0$) se velmi těsně přimyká k frekvenční charakteristice ideálního derivacního

dynamického vlastnosti derivacního členu vlivem zpoždění, ukazuje tab. 12. Takových členů se skutečně používá jako funkční členy v regulačorech nebo jako korekční členy v servomechanismech. Derivační charakteristika těchto členů je dán tím, že frekvenční charakteristika pro určitou oblast krmitočtu ($\omega \rightarrow 0$) se velmi těsně přimyká k frekvenční charakteristice ideálního derivacního

takového členu jsou popsány v tab. 12. Popis dalších kombinovaných členů (PI, PID, ID) je uveden v [7.3].

Tabuľka 12. Dynamické vlastnosti a príklady derivačného členu se zpoždením prvého rádu

Dynamické vlastnosti	Priekopy prevedení
Diferenciálny rovnic	$T_1 x'_2 + x_2 = K_0 x'_1$
	$K_0 = T_1^{-1}$
$F(p) = \frac{K_0 p}{T_1 + K_0 p}$	$u_1 = x_1$
Priehodová charakteristika	R
	$x_1 = T_1^{-1} u_1$
	$x_2 = x_1$
	$u_2 = x_2$
	$K_0 = T_1^{-1} R$
	$T_1 = T_1$
	$\text{Frakvenčná charakteristika}$
	Im
	Re
	$\omega = 0$
	$\omega = \frac{1}{T_1}$
	$20 \log \frac{K_0}{T_1}$
	$\omega = \frac{1}{T_1} \rightarrow \log \omega$

Statické soustavy se při vychýlení z rovnovážného stavu samy ustálí na nové hodnotě rovnovážného stavu.

Rovnice statické soustavy nultého rádu je

$$a_p x = y \quad (271)$$

přenos

$$F_s(p) = \frac{X(p)}{Y(p)} = \frac{1}{a_p} \quad (272)$$

Statická soustava prvního rádu je popsána diferenciální rovnicí

$$a_p \dot{x} + a_p x = y \quad (273)$$

Tab. 13. Dynamické vlastnosti kombinovaného členu

Diferenciálny rovnic	Prieklad členu R_1
$T_1 x'_2 + x_2 = K_0 x_1 + K_1 x'_1$	$u_1 = x_1$
	R_1
	$x_2 = x_1$
	$u_2 = x_2$
	$K_0 = T_1^{-1}$
	$T_1 = T_1$
	$F(p) = \frac{K_0 + K_1 p}{T_1 + T_1 p} = K_0 \frac{1 + T_1 p}{1 + T_1 p}$
$T_0 > T_1$	Zlen PI
	$T_0 = T_1$
	K_0
	$\text{Priehodová charakteristika}$
	Im
	Re
	$\omega = 0$
	$\omega = \frac{1}{T_1}$
	$20 \log \frac{K_0}{T_1}$
	$\omega = \frac{1}{T_1} \rightarrow \log \omega$
$T_0 < T_1$	Zlen PD
	$T_0 = T_1$
	K_0
	$\text{Frakvenčná charakteristika}$
	Im
	Re
	$\omega = 0$
	$\omega = \frac{1}{T_1}$
	$20 \log \frac{K_0}{T_1}$
	$\omega = \frac{1}{T_1} \rightarrow \log \omega$
$T_0 < T_1$	Elen PI
	$T_0 = T_1$
	K_0
	$\text{Frakvenčná charakteristika}$
	Im
	Re
	$\omega = 0$
	$\omega = \frac{1}{T_1}$
	$20 \log \frac{K_0}{T_1}$
	$\omega = \frac{1}{T_1} \rightarrow \log \omega$
$T_0 < T_1$	Elen PD
	$T_0 = T_1$
	K_0
	$\text{Frakvenčná charakteristika}$
	Im
	Re
	$\omega = 0$
	$\omega = \frac{1}{T_1}$
	$20 \log \frac{K_0}{T_1}$
	$\omega = \frac{1}{T_1} \rightarrow \log \omega$

7.2. REGULOVANÉ SOUSTAVY

Regulovaná soustava je čistě regulatívny obvod. Vstupuje do ní akční veličina u a poruchy y . Vystupuje z ní regulovaná veličina x (obr. 7.5).

Lineárni regulované soustavy jsou popsané lineárnimi diferenciálnimi rovnicemi obecného nultého rádu. Regulované soustavy rozdělujeme na statické a astatické.

Obsahuje-li taková soustava také člen s dopravním zpožděním T_d , je její přenos

$$F(p) = \frac{e^{-pT_d}}{p(a_0 p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + 1)}$$

Regulovaná soustava bývá často sestavena z několika členů prvního řádu, jejichž přenos je

$$F_s(p) = \frac{1}{a_0 p + a_0} \quad (285)$$

a které jsou zapojeny v sérii.

Obecně jich může být n a výsledný přenos soustavy je v takovém případě

$$F_n(p) = \frac{1}{(a_0 p + a_0)^n} \quad (286)$$

Charakteristická rovnice takové soustavy má pak násobný kořen, takže přenos (285) lze vyjádřit vztahem

$$F_n(p) = \frac{1}{a_0^n \left(p + \frac{a_0}{a_0} \right)^n} = \frac{1}{a_0^n} \cdot \frac{1}{(p + \alpha)^n} \quad (286)$$

kde $\alpha = \frac{a_0}{a_1} = \frac{1}{T_s}$, a T_s je doba náběhu každého člena, z níž je regulovala soustava sestavena.

Přechodová charakteristika takové soustavy je potom

$$h(t) = \frac{1}{a_0^n} \left\{ 1 - e^{-\alpha t} \left[1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{\alpha^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \right] \right\} \quad (287)$$

Jestliže $n \rightarrow \infty$, lze poražovat soustavu za systém s rozloženými parametry (vyskytuje se např. u přenosu tepla apod.).

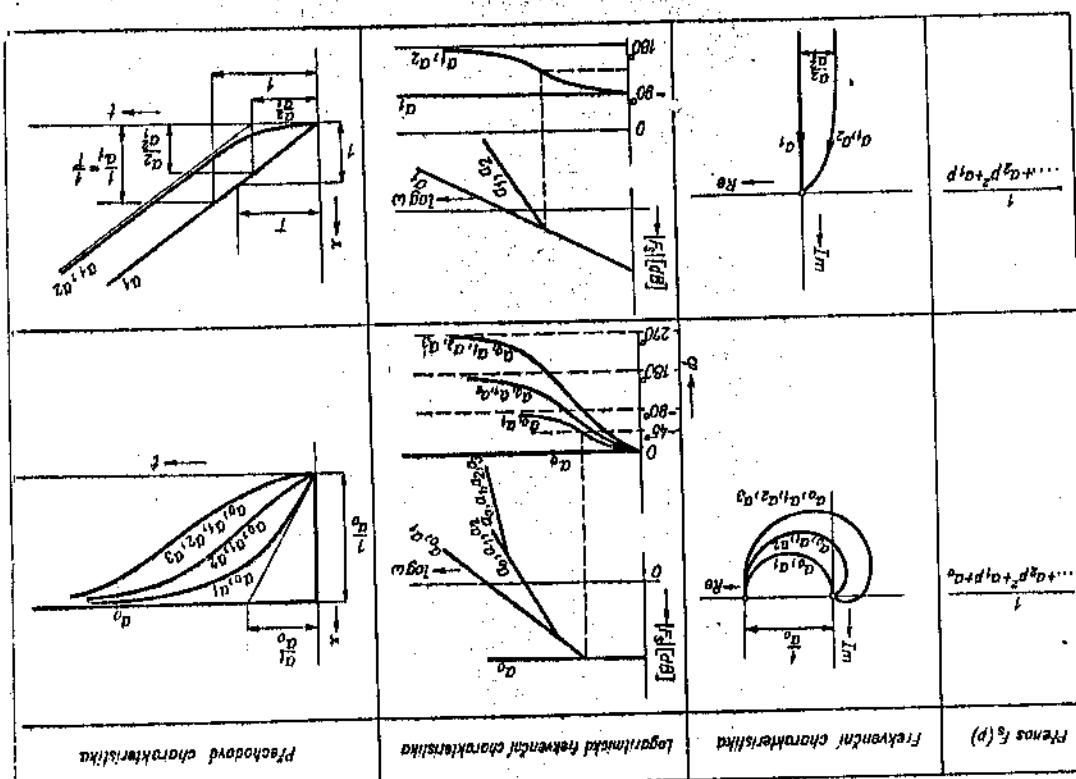
Vstupní veličina regulované soustavy y je podle obr. 73 dáná součtem akčních veličin u a poruch z . Ponevadž jde o lineární soustavu, platí princip superpozice, a lze tedy regulovanou soustavu popsat obecně ohrazenou rovnicí (pro n poruchových veličin u)

$$X(p) = K_s(p) V(p) + \sum_{i=1}^n F_{sr(i)}(p) U_i(p) \quad (288)$$

kde

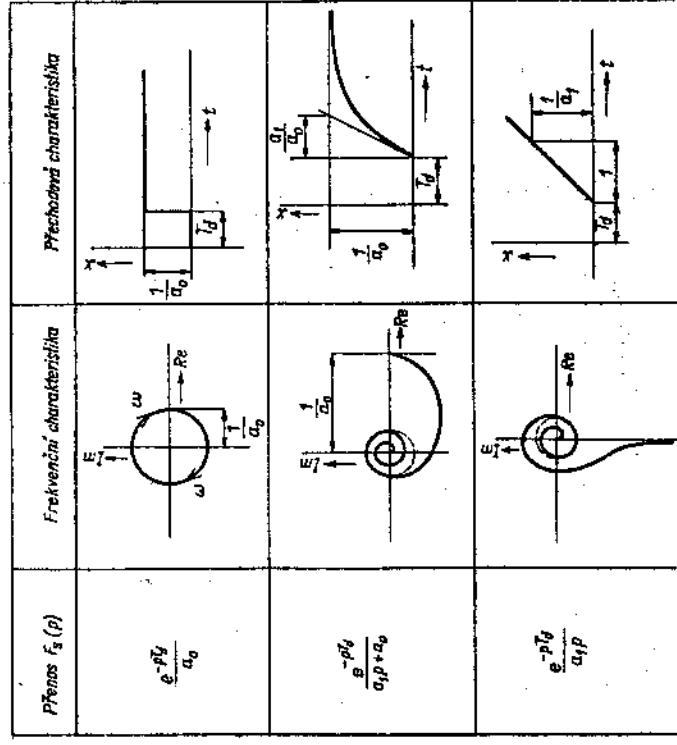
$$F_s(p) = \frac{X(p)}{V(p)} \quad \text{a} \quad F_{sr(i)}(p) = \frac{X(p)}{U_i(p)}$$

jsou přenosy stanovené výpočtem nebo měřením.



Obrázek 77. Charakteristiky regulované soustavy bez dopravního zpoždění

Tabuľka 15. Charakteristiky regulovaných sústav s dopravním zpoždiením



Je višak nutno poznamenať, že např. pro určenie stability obrodnu (jak bude odvozeno v nasledujúcej kapitole) je rozhodujúci príznačok

$$F_s(p) = \frac{X(p)}{V(p)}$$

V tabuľke 14 a 15 sú uvedený frekvenčný a priechodový charakteristiky niektorých regulovaných sústav.

7.3. REGULÁTOŘI

S prudkým rozvojom regulačnej techniky souvisí také rýchly rozvoj regulátorov, ktorí sú uskutečňujú samosčinnú reguláciu. Prítom dnes již existuje ve svete veľké množstvo typov regulátorov, ktorí sú odlišní nejen svým provedením, ale tiež sú svou funkciou. To je dôvod jednako možnosti využitia rôznych principov činnosti regulátorov, ale také nejednako možnosti používania rôznych procesov, ktorým je nutno regulátorov pribúsiť. Základný rozdiel v regulá-

tori vzhľadom k pribodu energie na *přímé a nepřímé (indirektní)* bylo i s příklady podrobne probáno v 1. kapitole. Jiným hlediskem, podle ktorého můžeme rozdielovať jednotlivé typy regulátorov, je jejich konstrukční provedení. Je možné je možné využít nejrůznějších fyzikálních možností zesilování a zpracování signálů. Podle toho rozdielujeme regulátory na *mechanické, pneumatické, hydraulické a elektrické*. Regulátory se také rozdělují podle toho, v jakém tvaru je signál regulátorem přenášen. Rozděluji se pak na tzv. *analogní a digitální (číslicové)*. Jestliže je signál v regulátoru sice převáděn na veličiny různé fyzikální povahy (např. teplota na elektrické napětí), které po zesílení jsou převáděny servomotorem na mechanickou výchylku, rychlosť otáčení tachodynamy je převáděna na napětí apod.), ale přitom tyto veličiny jsou stále podobné (analogické) původnímu signálu, nazýváme takový regulátor analogový. Přitom připomínáme, že signály mohou být sečteny i derivovány a integrovány. Prenosové vlastnosti jsou popsány lineární diferenciální rovnicí.

Pak nazýváme takový regulátor lineární. K popisu jeho vlastností může být tedy použito přechodových i frekvenčních charakteristik i operátorových přenosů. V dalším budeme uvažovat jen lineární regulátory analogové. Regulátory digitální (číslicové) pracují tak, že je v nich k určitém hodnotám signálu přiřazena určitá hodnota nějakého číslicového systému. Budou uvedeny současné s impulsovými a nelineárními reguláciemi pořadí.

Lineární analogní regulátor se cíle rozděluje podle toho, jakou mají splňovat funkci. To je dano jejich přenosovými, tj. dynamickými vlastnostmi. Přitom předpokládáme, že potom při daném typu regulátoru nezáleží na konstrukčním provedení, a to vycházej v podstatě z jiných požadavků. Z hlediska prenosových vlastností regulátorů můžeme uvést tři základní druhy chování regulátorů:

1. proporcionalní chování,
2. integrační chování,
3. derivaciální chování.

Na obr. 74 je znázorněn předpokládaný regulátor blokem, kde na výstupu je akční veličina y . Vstup regulátoru označujeme pro jednoduchost x . Ve skutečnosti je však vstupem regulátoru odchylika e , jak je naznačeno na obr. 2. Uvažujeme-li regulátor na konstantní hodnotu a signály v odchylkách od rovných stavů, platí, že $w = 0$, takže potom regulaci odchylika je přímo dána odchylikami regulované veličiny x od rovnovážného stavu, tj. $e = x$.

1. Proporcionalní chování — *regulátor P*. Základní vlastnosti tohoto regulátoru jsou uvedeny v tab. 16.
2. Integrační chování — *regulátor I*. Základní dynamické vlastnosti

Tohoto regulátoru jsou uvedeny v tab. 17. Ze základní rovnice integračního

$$y = \frac{1}{T_1} \int x dt \text{ plyně také, že } y = \frac{1}{T_1} x.$$

To znamená, že integrační regulátor pracuje tak, že rychlosť změny akční

Tabulka 17. Dynamické vlastnosti regulátoru I.

	řešení	se zpož. 1.řádu	se zpož. 2.řádu
$y = K_1 \cdot \text{fstat}$	$T_1 y' + y = K_1 \cdot \text{fstat}$	$T_1^2 y'' + T_1 y' + y = K_1 \cdot \text{fstat}$	
diferenciální složka			
$F_R(p) = K_1 \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{T_1 p}$	$F_R(p) = \frac{K_1}{p(T_1 p + 1)}$	$F_R(p) = \frac{K_1}{p(T_1^2 p^2 + T_1 p + 1)}$	
frekv. char. v log. souř.			
frekv. char. fázového charakteristika			
průchodové charakteristika			
prenos			

Tabulka 16. Dynamické vlastnosti regulátoru P

	řešení	se zpož. 1.řádu	se zpož. 2.řádu
$y = K_0 \cdot x$	$T_1 y' + y = K_0 x$	$T_1^2 y'' + T_1 y' + y = K_0 x$	
diferenciální složka			
$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = K_0$	$F(p) = \frac{K_0}{T_1 p + 1}$	$F(p) \approx \frac{K_0}{T_1^2 p^2 + T_1 p + 1}$	
frekv. char. v log. souř.			
frekv. char. fázového charakteristika			
průchodové charakteristika			
prenos			

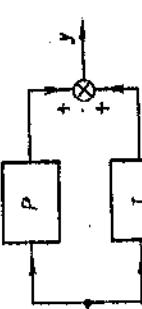
veličiny (pohyb ventilu, pistu atd.) je přímo tímerně vstupním signálem.

Je tedy regulátor v činnosti stále, pokud regulační odchylka není nulová.

3. Derivační chorvání — (D složka regulátoru). Samostatnýho regulátoru D nelze použít pro regulaci. Regulátor může být pouze I nebo P a k tomu lze případně ještě přidat derivační složku. Tak vznikou regulátory např. PD

nebo PID. Derivační složka se používá pouze jako doplněk regulátoru ke zlepšení vlastností regulačního pochodu. Základní charakteristiky derivační složky jsou v tab. 18.

4. Kombinované regulátory vznikají složením různých druhů činnosti v jednom regulátoru. Tak např. regulátor PI vznikne paralelním zapojením P členu a I členu, jak ukazuje obr. 75. Jeho dynamické vlastnosti jsou přehledně uvedeny v tab. 19.



Obr. 75. Vytvoření regulátoru PI

Tabuľka 18. Dynamické vlastnosti deriváčnej súčioby

ideálne	se zpoždiením 1. kôdu	se zpoždiením 2. kôdu
$y = K_1 x'$	$T_1 y' + y = K_1 x'$	$T_2^2 y'' + T_1 y' + y = K_1 x'$
$F_R(\rho) = K_1 P$	$F_R(\rho) = \frac{K_1 P}{T_1 \rho + 1}$	$F_R(\rho) = \frac{K_1 P}{T_2^2 \rho^2 + T_1 \rho + 1}$
prenos	prenos	prenos
frekv. char. v log soul.	frekv. char. homoplavivne	frekv. char. v log soul.
prechodevod charakteristika	prechodevod charakteristika	prechodevod charakteristika
dierecnicidifinovanie	dierecnicidifinovanie	dierecnicidifinovanie

Tabuľka 19. Dynamické vlastnosti vlastnosti regulátora PI

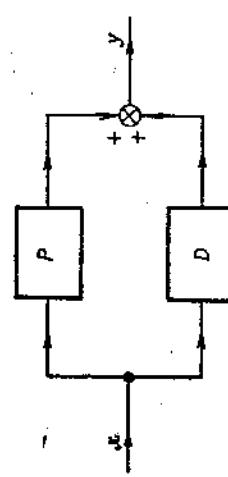
ideálne	se zpoždiením 1. kôdu	se zpoždiením 2. kôdu
$y = K_0 x + K_1 \int x dt$	$I_1 y' + y = K_0 x + K_1 \int x dt$	$T_2^2 y'' + T_1 y' + y = K_0 x + K_1 \int x dt$
$F_R = K_0 + \frac{K_1}{\rho}$	$F_R = \frac{K_0 + \frac{K_1}{\rho}}{T_1 \rho + 1} =$ $= K_0 \left(1 + \frac{1}{T_1 \rho} \right)$	$F_R = \frac{K_0 + \frac{K_1}{\rho}}{T_2^2 \rho^2 + T_1 \rho + 1} =$ $= K_0 \frac{1}{T_2^2 \rho^2 + T_1 \rho + 1}$
prenos	prenos	prenos
frekv. char. v log soul.	frekv. char. homoplavivne	frekv. char. v log soul.
prechodevod charakteristika	prechodevod charakteristika	prechodevod charakteristika
dierecnicidifinovanie	dierecnicidifinovanie	dierecnicidifinovanie

U každého skutečného členu, a tedy i u každého skutečného regulátora sa uplatňujú rôzne zpoždenia pri prenosu signálu, to znamená, že na levé strane diferenciální rovnice se ještě objeví zpoždjující členy dané časovými konstantami T_1, T_2, \dots, T_n . Jestliže se např. uplatní požadovaný druhý článok, je pak rovnice regulátora PID

$$T_2^2 y + T_1 y' + y = K_0 \left[x + T_{D,2} \cdot t + \frac{1}{T_1} \int x dt \right] \quad (289)$$

Tomu odpovídajúci prenos bude

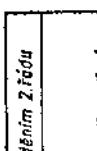
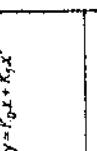
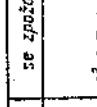
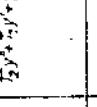
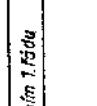
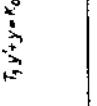
Obr. 26. Vytvorení regulátora PD



Regulátor PD vznikne napr. paralelním zapojením regulátora P a složky D, jak ukazuje obr. 76. Dynamické vlastnosti tohto regulátora sú v tab. 20. Regulátor PID vznikne paralelním řaze- ním členov podľa tab. 21.

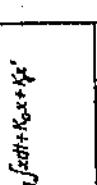
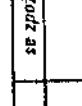
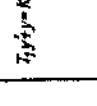
Uvedené typy regulátorov sú ovšem regulátory ideálni.

Tabuľka 20. Dynamické vlastnosti regulačného zariadenia PID

základná jednotka	se zpoždiením 1. rádu	se zpoždiením 2. rádu
$y = K_0 x + K_1 x'$	$\ddot{y} = K_0 \ddot{x} + K_1 \dot{x}'$	$\ddot{y} = K_0 \ddot{x} + K_1 \dot{x}' + K_2 x' + K_3 x''$
$F_R = K_0 + pK_1 =$ $= K_0 (1 + T_0 P)$	$F_R = \frac{K_0 + pK_1}{T_0 P + 1} =$ $= K_0 \frac{T_0^2 P^2 + T_0 P + 1}{T_0^2 P^2 + T_0 P + 1}$	$F_R = \frac{K_0 + K_1 P}{T_0^2 P^2 + T_0 P + 1} =$ $= K_0 \frac{\frac{1}{T_0^2} + 1 + T_0 P}{T_0^2 P^2 + T_0 P + 1} =$ $= K_0 \left(\frac{1}{T_0^2} + 1 + T_0 P \right)$
prenos		
charakteristický rovnica	$x_1(t) = K_0 e^{-(T_0 t)}$	$x_1(t) = K_0 e^{-(T_0 t)} \cos(\omega_0 t)$
frekvencia v log. súchu		
reakčná charakteristika novinky		
prechodevad charakteristika		

v týchto tabuľkách kresleny za predpokladu zpoždení prvého a druhého rádu. Obecné môžu byť tato zpoždenia i v rôznych rádu. Pri vyšetrovaní regulačných obvodov je treba respektovať u skutečných regulačorov prenosy zahrnujúci také

Tabuľka 21. Dynamické vlastnosti regulačného zariadenia PID

základná jednotka	se zpoždiením 1. rádu	se zpoždiením 2. rádu
$y = K_0 x + K_1 x'$	$y = K_0 x + K_1 x' + K_2 x''$	$y = K_0 x + K_1 x' + K_2 x'' + K_3 x'''$
$F_R = K_0 + pK_1 =$ $= K_0 (1 + T_0 P)$	$F_R = \frac{K_0 + pK_1}{T_0 P + 1} =$ $= K_0 \frac{T_0^2 P^2 + T_0 P + 1}{T_0^2 P^2 + T_0 P + 1}$	$F_R = \frac{K_0 + K_1 P}{T_0^2 P^2 + T_0 P + 1} =$ $= K_0 \frac{\frac{1}{T_0^2} + 1 + T_0 P}{T_0^2 P^2 + T_0 P + 1} =$ $= K_0 \left(\frac{1}{T_0^2} + 1 + T_0 P \right)$
prenos		
charakteristický rovnica	$x_1(t) = K_0 e^{-(T_0 t)}$	$x_1(t) = K_0 e^{-(T_0 t)} \cos(\omega_0 t)$
frekvencia v log. súchu		
reakčná charakteristika novinky		
prechodevad charakteristika		

$$F_R(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = K_0 \frac{1 + T_0 P}{1 + T_1 P + T_0^2 P^2} \quad (290)$$

Jak vidíme, je v čiateli prenosu ideálneho regulačného zariadenia PID a ve jmenovateli je znaménky mnohotiel pôsobiaci zpoždovaci členy.

Také skutečné charakteristiky ostatných typov regulačorov se proti ideálnemu zmenší, jak je uvedeno v tab. 16 až 20. Všechny skutečné charakteristiky jsou

zpoždovacie členy. Uvažujeme-li potom vlastnosti regulačného obrodu, to znamená prenos rozpojený smyčky $F(p) = F_R(p)F_S(p)$, musíme mit na pamäti, že ke zpoždeniu sústavy, ktoré je charakterizované zpoždjujúcimi členy ve jmenovateli sústavy, pôsobí také zpoždjujúcimi členy ve jmenovateli prenosu

regulátoru. Znovu je třeba zdůraznit, že dynamické vlastnosti regulace nezávisí jen na dynamických vlastnostech regulátoru nebo jen na dynamických vlastnostech soustavy, ale že je třeba pouzovat soustavný regulátor jako celek. Správná volba určitého typu regulátoru vyplýne z teoretického rozboru celého regulačního obvodu. Například používání přenosnosti regulace v ustáleném stavu se určí rozborem přenosu celého regulačního obvodu s ohledem na dané vstupní signály. Protože k určení dynamických vlastností regulace je třeba pouzovat regulační obvod jako celek, je volba typu regulátoru v podstatě volbou dophňující části přenosu nebo frekvenční charakteristiky k dané charakteristice soustavy tak, aby celková charakteristika měla požadované vlastnosti. Proto není možno předem jednoduše říci, že určitý typ regulátoru bude předem zabezpečovat určité chování regulátoru, obvodu. Přesto však můžeme využít několik základních vlastností regulace s cílem uvedenými základními typy regulátorů.

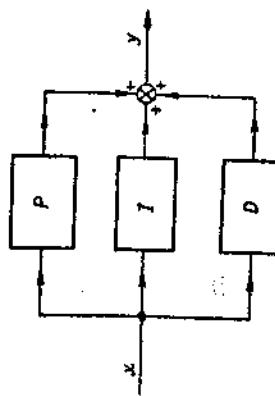
Předpokládejme regulaci statické soustavy regulátorem I, tak jak je znázorněna na obr. 78. Integrální vlastnosti jsou dány servomotorem, u něhož rychlosť otáčení, tj. rychlosť změny polohy regulačního organu, je přímo úměrná vstupnímu napětí. Při jakékoli nennové regulaci odchylky dostává zesilovač signál,

a servomotor se otáčí rychlosťí úměrnou tomuto signálu. Pokud je nějaká odchylka od požadované hodnoty, regulátor je neustále v činnosti a zasahuje do regulační soustavy. Regulační pochod se může ustálit pouze v tom případě, že odchylka je nulová a že tedy byly dosaženo shody žádané a skutečné hodnoty. Rákam, že integrální regulátor reguluje na nulovou regulaci odchylku. Je tedy možno s ním dosáhnout vysoké přesnosti regulace. Při použití integračních regulátorů se ale zhoduje stabilita systému.

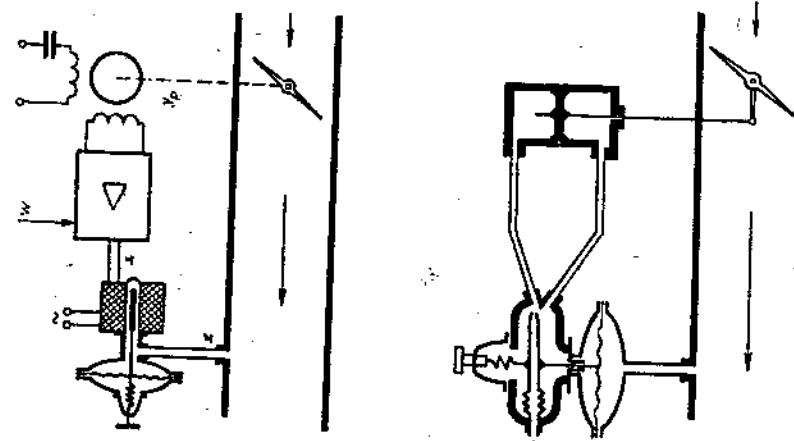
Proportioanální regulátor dává akční většinu, která je přímo úměrná regulační odchylce. Příklad regulace s regulátorem P je uveden na obr. 79, kde je regulace napětí. Aby regulátor dával požadované napětí, je nutné, aby také na budoucích vnitru budělo napětí. Toto napětí dostává buzení ze zesilovače regulátoru pouze v tom případě, je-li na vstupu zesilovače nějaká odchylka regulovaného většiny. Regulační odchylka znamená chybou regulace.

Proportioanální regulátor pracuje tedy vždy s určitou konstantou hodnotou regulační odchylky. Je zřejmé, že chyba regulace bude tím menší, čím bude menší regulační odchylka. Toho se dosahne použitím regulátoru s velkým zesilencem, protože pak určitá protější hodnota budoucího napětí bude přesahovat tím menší regulaci odchylky, čím větší zesilení má zesilovač. Proportioanální regulátor pracuje rychle, protože časová zpoždění skutečného proporcionalního regulátoru jsou obvykle zanedbatelná proti časovým zpožděním regulačního obvodu. V případech, kdy je požadována velká přesnost regulace, vychází zlepšení zavedení derivační složky.

Tak vznikne např. regulátor PD (s proporcionalní a derivační složkou). Velikost akční většiny je úměrná velikosti odchylky a také rychlosť její změny, podle obr. 80. Z počátku, když regulaci odchylka vrátila, dává regulátor PD větší velikost akční většiny, než by dával jen regulátor P, protože se přidala ještě také složka $K_1 \frac{dx}{dt}$. Začne-li se odchylka zmenšovat, změní



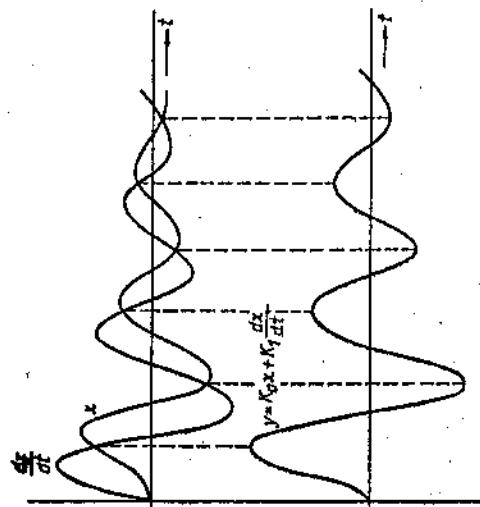
Obr. 77. Vytvoření regulátoru PID



Obr. 78. Integráční regulátor tlaku

Proportioanální regulátor pracuje tedy vždy s určitou konstantou regulační odchylky. Je zřejmé, že chyba regulace bude tím menší, čím bude menší regulační odchylka. Toho se dosahne použitím regulátoru s velkým zesilencem, protože pak určitá protější hodnota budoucího napětí bude přesahovat tím menší regulaci odchylky, čím větší zesilení má zesilovač. Proportioanální regulátor pracuje rychle, protože časová zpoždění skutečného proporcionalního regulátoru jsou obvykle zanedbatelná proti časovým zpožděním regulačního obvodu. V případech, kdy je požadována velká přesnost regulace, vychází zlepšení zavedení derivační složky.

se známěnko derivace $\frac{dx}{dt}$ a akční větina y se začne změnovat rychleji než u regulátoru P. Regulační orgán se zadne přestavovat. Tím se podstatněurychlik regulace a zmensi se kmitání regulačního pochodu. Cítivost regulátoru na reliktu a znaménko derivace regulační odchylik dává schopnost jakoby předvídat, jakým směrem a jak mnoho by se regulovaná veličina měnila působením posledního signálu. Při použití regulátoru PID lze dosáhnout potom nejen krátké doby regulačce, ale růzem integrální složky také vysoké přesnosti regulace.



7.4. KOREKČNÍ ČLENY REGULAČNÍCH OBVODŮ

Obr. 89. Průběhy odchyliky regulované veličiny, její derivace a akční větiny y u regulátoru PD

K vytvoření požadovaných dynamických vlastností je nutno zavádět do regulačních obvodů doplňková zařízení. Tato zařízení nazýváme korekčními obvody a u obyčejných regulačních obvodů je realizujeme pasivními a v jediných případeck i aktivními elektrickými obvody. Lze je principiálně vytvářet i na jiném fyzikálním základu (např. mechanickém, pneumatickém, hydraulickém). Rozhodující je zde, o jaký druh regulačního obvodu jde (pneumatický, hydraulický, elektrohydraulický apod.), a možnost jednoduché realizace členu s požadovanými dynamickými vlastnostmi.

Nevíce jsou jako korekční členy používány pasivní elektrické obvody právě s ohledem na jejich jednoduchou realizaci. Jsou to v podstatě elektrické čtyřpolý, které neobsahují zdroj energie. Vstupem a výstupem u této obvodů bývá obyčejně elektrické napětí. Korekční čtyřpolý se vytváří ze standardních prvků (odporů, kondenzátorů) a počet typů takových obvodů je prakticky neomezený. Tyto obvody se také velmi jednoduchým způsobem spojují s ostatními částmi regulačního obvodu. Nedostatkem je, že je nelze výkonově zlepšit, a proto jsou zapojovány před zesilovače nebo v jejich zpětných vazbách.

Nejponížovanější jsou členy, které se chovají jako deirráční, integrační a integro-derivací. Logaritmické frekvenční charakteristiky, přenosy a zapoje-

ni základních členů jsou v tab. 22. Jde o korekční členy pro stejnosmerný signál odchyliky. Obvod podobného typu pro střídavý signál odchyliky byl uveden v 6. kapitole. Podrobný přehled korekčních členů lze nalézt např. v [7.4].

Tabulka 22. Charakteristiky základních korekčních členů

Přenos	Frekvenční charakteristika	Přenos
$F(p) = K$ $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \ll 1$		
$F(p) = \frac{pT}{1 + pT}$ $T = RC$		
$F(p) = \frac{K(1+pT)}{1 + pT}$ $T = CR_1$ $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \ll 1$		
$F(p) = \frac{1}{1 + pT}$ $T = RC$		
$F(p) = \frac{K}{1 + pT}$ $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \ll 1$ $T = C \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} = K R_1 C$		

Pohybovéní tab. 22

LITERATURA K 7. KAPITOLE

- [7.1] Oprecht, W.: Právnická regulaciální technika. Praha: SNTL 1958
 [7.2] Štrejc, M., Šalamon, M., Kotek, Z., Balda, M.: Základy teorie samočinné regulace.
 Praha: SNTL 1958
 [7.3] Trnka, Z.: Servomechanismy. Praha: SNTL 1954
 [7.4] Osnovy avtomatizácie a korekcie regulovania. Tom II. Časť 2, pod redakcií V. V. Solodnikova, Moskva, Maďarsko, 1959

Přenos	Frekvenční charakteristiky logaritmických základních členů	Provedení členu	
		Pracovní	Stavový
$F(p) = \frac{1 + pT_1}{T_1 + pT_2}$			
$T_1 = C_1(R_1 + R_2)$			

KONTROLNÍ OTÁZKY

1. Jaké jsou dynamické vlastnosti základních členů regulátorních obvodů (proporcionálního, zpoždějivého, předstihového, a dopravním zpožděním)?
2. Co je to statická a astatická regulovaná soustava?
3. Jaké jsou základní typy regulátorů a jak se vzájemně liší?
4. Uveďte dynamické vlastnosti regulátoru P, PI a PID (přechodové charakteristiky)!
5. Co jsou korekční členy a jaký průběh má logaritmická amplitudová charakteristika integračního, derivativního a integro-derivativního korekčního členu?

8. STABILITA LINEÁRNÍCH REGULAČNÍCH OBVODŮ

8.1. PODMÍNKY STABILITY

Regulační pochod v lineárních regulačních obvodech s konstantními parametry je popsán lineární diferenční rovnici obecné záložné řadu

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x + a_0 x = f(t) \quad (291)$$

kde $x = x(t)$ je regulačovaná veličina nebo její odchylka od žádané hodnoty, $f(t)$ práva strana rovnice, závisící na druhu vnější poruchy a místu jejího vstupu do regulačního obvodu.

Označme-li přenos lineárního obvodu $F(p)$, je Laplaceov obraz regulačované veličiny $x(t)$ dán týmazem

$$X(p) = F(p)f(p) + L(p) \quad (292)$$

kde $L(p)$ je operátor, určený počátečními podmínkami.

Přejdeme-li k originálnímu, dostaneme

$$x(t) = L^{-1}[F(p)f(p) + L(p)] = x_p(t) + x_o(t) \quad (293)$$

Zde $x_p(t)$ je vnučená složka regulačované veličiny. Je to parafázární řešení nehomogenní diferenční rovnice (291), závisící na její pravé straně; je tedy dánou výrazy $f(t)$ a $F(p)$ a charakter jejího časového průběhu funkce $f(t)$.

Výraz $x_p(t)$ představuje obecné řešení homogenní diferenční rovnice (291) (bez pravé strany) a charakterizuje chování regulačované veličiny (výstupu regulačního obvodu) v přechodném stavu. Je určeno počátečními podmínkami a počátečními hodnotami vzniku (poruchové funkce) $f(t)$. Charakter časové změny přechodné složky regulačované veličiny je dán charakteristikami obvodu, tj. tvarem přenosové funkce $F(p)$.

Regulační obvod je stabilní, jestliže s rostoucím časem ($t \rightarrow \infty$) se obecné řešení $x_p(t)$ blíží k nule, tj. když se v obvodu ustálí vnučený stav. Z rovnice (293) vyplývá matematický zápis této podmínky, tj.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t) = 0 \quad (294)$$

Jestliže s časem ($t \rightarrow \infty$) $x_p(t)$ neomezeně roste, tj. platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t) = \infty \quad (295)$$

nazýváme obvod nestabilním.

Jestliže s časem $x_p(t)$ ani neomezeně neroste, ani nekonverguje k nule, nazýváme obvod neutrálním.

Řešení homogenní rovnice (291), tj. přechodnou složku $x_p(t)$ lze psát ve tvaru

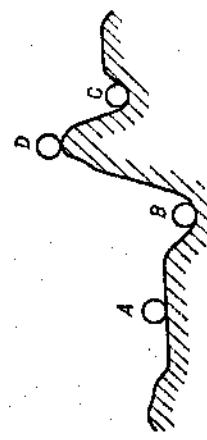
$$x_p(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{\lambda_i t} \quad (296)$$

Stabilita je základní a nutnou (i když nepostačující) podmínkou správné funkce regulačních obvodů. Regulační obvod je v rovnovážném stavu (v rovnováze), nemění-li se regulačovaná veličina s časem.

Regulační pochod je stabilní, jestliže po vychýlení regulačního obvodu z rovnovážného stavu a odstranění vzniku, který tento odchylku způsobil, se regulační obvod během času znovu vrátí do původního rovnovážného stavu (někdy nazývaného též klidovým stavem).

Xelineární obvody mohou být stabilní „v malém“ při malých počátečních odchylkách a nestabilní „ve velkém“ při velkých počátečních odchylkách. V lineárních obvodech je pojem „malého“ a „velkého“ ekvivalentní v tom smyslu, že charakter procesu nezávisí na velikosti vzniku, případně poruchy.

V podstatě existují tři druhy rovnovážných stavů: *stabilní, neutrální, nestabilní*. Pro názornost si je lze představit podle obr. 81.



Při malých vychýleních kuličky A z rovnovážného stavu a doznamením vzniku, který tento odchylku způsobil, se kuličky vrátí do původní polohy.

Při rovnovážném stavu B a C se kuličky zastaví v nové rovnovážné poloze. Tento rovnovážný stav nazýváme neutrální.

Při malých odchylkách kuliček B a C z rovnovážného stavu a po doznamení vzniku, který tento odchylku způsobil, se kuličky vrátí do původní polohy. Kuličky B a C jsou stabilní „v malém“. Při velkých odchylkách od rovnovážného stavu se kuličky B a C nevrátí do původní polohy a jsou nestabilní „ve velkém“.

Kulička D se nachází v nestabilním rovnovážném stavu. Malé odchylky na jednu nebo druhou stranu způsobi další vychýlení kuličky z původní polohy.

kde k_i jsou koeficienty, určené parametry obvodu a jeho počátečním stavem, p_i kořeny charakteristické rovnice obvodu (tj. charakteristické rovnice diferenciální rovnice (291)),

$$H(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (297)$$

kde n je řád diferenciální rovnice obvodu, a tedy stupeň charakteristické rovnice.

Každému reálnému kořenu $p_i = c_i$ odpovídá ve výrazu (296) složka tvary

$$x_i(t) = k_i e^{c_i t} \quad (298)$$

Pár komplexně sduřených kořenů charakteristické rovnice

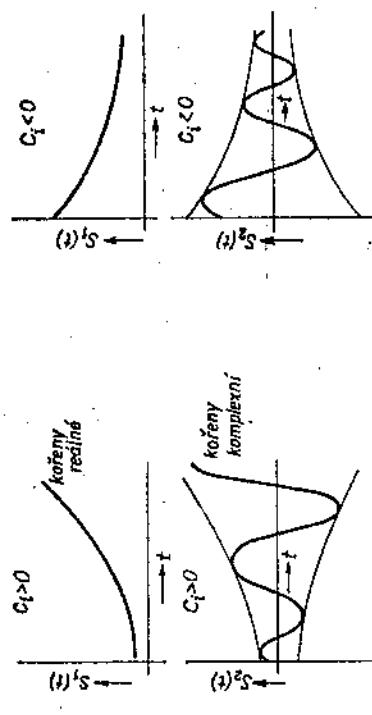
$$p_i = c_i + j\omega_i$$

$$\begin{aligned} x_{i+1}(t) &= c_i t - j\omega_i \\ &\text{odpovídá časová složka tvary} \\ &s_1(t) = k_i e^{c_i t} e^{j\omega_i t} + k_{i+1} e^{c_i t} e^{-j\omega_i t} = \\ &= 2 M_i e^{c_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \end{aligned} \quad (299)$$

kde $k_i = M_i e^{c_i t}$; $k_{i+1} = M_i e^{-c_i t}$ jsou vzájemně sduřené komplexní konstanty. Abychom mohli posoudit chování obvodu v přechodném stavu, je nutno uvážit tři případy:

Obr. 82. Rozložení kořenů v komplexní rovině

1. Reálná část kořenu charakteristické rovnice je kladná (čistě reálný kořen je kladný), tj. $c_i > 0$.



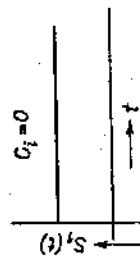
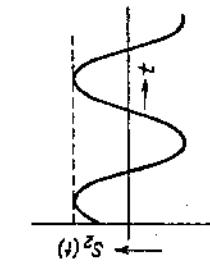
Obr. 82. Rozložení kořenů v komplexní rovině

2. Reálná část kořenu je záporná (čistě reálný kořen je záporný), tj. $c_i < 0$.

3. Reálná část kořenu je nulová (existuje pár sduřených imaginárních kořenů), tj. $c_i = 0$.

V prvním případě leží kořen v pravé komplexní polovině kořenů, tj. napravo od imaginární osy, v druhém případě v levé komplexní polovině, tj. nalevo od imaginární osy, a konečně v třetím případě padnou kořeny přímo na imaginární osu, odr. 82.

Podle rozložení kořenů charakteristické rovnice vůči imaginární ose komplexní roviny kořenů p je charakter časového průběhu složek $s_1(t)$ a $s_2(t)$ podle výrazu (298) a (299) různý. Pro $c_i > 0$ (odr. 82) odpovídají složka s rostoucím časem ($t \rightarrow \infty$) neustále roste, a roste tedy i celá přechodná složka $x_p(t)$, obvod je nestabilní.



Obr. 83. Časový průběh složek $s_1(t)$ a $s_2(t)$ pro $c_i > 0$

Pro $c_i < 0$ odpovídající složka proti $t \rightarrow \infty$ se limituje k nule a jsou-li všechny $c_i < 0$, limitují k nule i ostatní složky a platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t) = 0$$

a obvod je stabilní.

Má-li charakteristická rovnice nulový reálný kořen nebo nulovou reálnou část párů komplexně sduřených kořenů (pár čistě imaginárních kořenů), tj. $c_i = 0$, potom s rostoucím časem $t \rightarrow \infty$ nebude složky $s_1(t)$ nebo $s_2(t)$ ani neomezeně růst, ani limitovat k nule. Jejich průběh bude podle odr. 84.

Existence alespoň jednoho takového kořenu znamená, že v řešení (296) so objeví složka s konstantním amplitudou. V případě, že ostatní reálné kořeny jsou záporné a komplexní kořeny mají záporné reálné části, má

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t)$$

konečnou hodnotu. Obvod je v tomto případě neutrální a nachází se tedy na mezi stability.

Uvažme nyní jesté případ, že charakteristická rovnice (297) má m násob-

ných reálných kořenů p_i . Potom řešení (296) lze psát ve tvaru

$$x_p(t) = (k_{11} + k_{12}t + k_{13}t^2 + \dots + k_{1m}t^{m-1})e^{p_1 t} + k_{21}t + k_{22}t^2 + \dots +$$

Mnohočlen

$$k_{11} + k_{12}t + k_{13}t^2 + \dots$$

s rostoucím časem ($t \rightarrow \infty$) neomezeně roste.

Pro $p_1 < 0$ je součinitel $e^{p_1 t}$ tlumenou exponentiální funkci časem, která klesá s rostoucím časem k nule rychleji, než se blíží mnohočlen $k_{11} + k_{12}t + k_{13}t^2 + \dots$, k nekonečnu a platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (k_{11} + k_{12}t + k_{13}t^2 + \dots + k_{1m}t^{m-1}) e^{p_1 t} = 0$$

Z výše uvedeného tedy vyplývá, že mnohou a postačující podmínkou stability lineárního obvodu je, aby všechny reálné kořeny a reálné části komplexních kořenů charakteristické rovnice (297) byly záporné.

Tuto podmínku lze formulovat také tak, že všechny kořeny charakteristické rovnice musí ležet v levé komplexní polorovině kořenů p . Každé charakteristické rovnici odpovídá určité rozložení kořenů v komplexní rovině p . Při změně parametrů obvodu (a tedy také koeficientů charakteristické rovnice) se kořeny pohybují v komplexní rovině kořenů, a mohou přejít imaginární osu do pravé poloroviny, což odpovídá přechodu obvodu ze stabilního stavu do instabilního. Vztah mezi parametry obvodu, a tedy i koeficienty charakteristické rovnice, když alespoň jeden reálný kořen nebo dva komplexní sdružené kořeny padnou na imaginární osu a všechny ostatní kořeny zůstanou v levé polorovině, určuje mez (hranici) stability. Tato mez rozděluje parametry na dvě skupiny — jedna skupina odpovídá stabilnímu a druhá nestabilnímu stavu obvodu.

Obecně řešil problém stability A. M. Ljapunov [8.5]. Podrobněji se budeme teorii stability A. M. Ljapunova zabývat v kapitole o ne-lineárních regulačních obvodech. Dojdeme-li při zjištování stability k závěru, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_p(t) = 0$$

nazýváme tuto stabilitu *stabilitou asymptotickou*.

Z uvedeného vyplývá, že sledování stability lineárních regulačních obvodů vede k určení rozložení kořenů charakteristické rovnice v komplexní rovině kořenů. Pro algebraické rovnice stupně $n \leq 4$ jsou známý analytické výrazy pro určení jejich kořenů. Pro rovnice vyšších stupňů takové výrazy neexistují. Při stanovení stability obvodu však není nutno znát kořeny v explicitním tvaru, ale stačí znát (jak bylo uvedeno) jejich rozložení v komplexní rovině. Pravidla, která nám umožní toto rozložení určit, nazýváme kritéria stability.

V případě, kdy neuříjeme hodnotu kořenů charakteristické rovnice v explicitním tvaru, ale jen chorán jejich reálných částí, hovoříme také o tzv. nejrůznějších zjišťování stabilit.

8.2. KRITÉRIA STABILITY

Kritérium stability existuje celá řada. Matematicky jsou všechna ekvivalentní, neboť všechna řeší v podstatě otázku, zda leží kořeny charakteristické rovnice v levé komplexní polorovině. V dálém uvedeme pouze kritéria nejdůležitější a praktické použití toho či jiného kritéria je dáno charakterem řešené úlohy.

1. Kritéria algebraická

Algebraická kritéria stability vycházejí z koeficientů charakteristické rovnice. Nejznámější jsou kritéria Hurwitzovo a Routhovo-Schurovo. Aniž bychom prováděli důkazy (které lze nalézt v speciální literatuře [8.1, 8.11]), uvedeme znění těchto kritérií.

Pro posouzení stability podle Hurwitzova kritéria vytvoříme nejprve tzv. Hurwitzův determinant

$$D_n := \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & a_{n-4} & \dots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & \dots \\ & & & & \vdots \\ & & & & a_2 \\ & & & & a_1 \\ & & & & a_0 \end{vmatrix} \quad (301)$$

Tento determinant je pro rovnici n ho stupně a sestaví se tak, že do jeho hlavní diagonály se napsí koeficienty charakteristické rovnice (297), poté naje koeficientem a_{n-1} a konče koeficientem a_0 , sloupce nad diagonálu se doplní koeficienty s klesajícími indexy. Na místech, kam by bylo nutno doplnit koeficienty s indexy většími než n a koeficienty s indexy zápornými, jsou nuly.

Nyní lze formulovat *Hurwitzovo kritérium*:

Lineární regulační obvod je stabilní tehdy a jen tehdy, jestliže všechny podmínky

Z uvedeného výpočtu dále plyne, že hlavní determinant

$$D_n = a_0 D_{n-1}$$

Podle Hurwitzova kritéria stability je obvod stabilní, jsou-li všechny hlavní subdeterminanty různé než nula a speciálně $D_n > 0$. Obvod bude na mezi stability, když

$$D_n = a_0 D_{n-1} = 0 \quad (302)$$

Tato rovnice je splňena ve dvou případech:

$$1. a_0 = 0$$

$$2. D_{n-1} = 0$$

V prvním případě ($a_0 = 0$) se obvod nachází na mezi tzv. *aperiodické stability* (jeden z kořenů charakteristické rovnice je nulový). V druhém případě ($D_{n-1} = 0$) říkáme, že obvod je na mezi tzv. *limitní stability* (dvě sdružené kořeny charakteristické rovnice se nacházejí na imaginární ose).

V naprosté většině případů je $a_0 \neq 0$, a proto nachází se obvod na mezi stability, je to mezi stability kmitání.

Jak bylo řezeno, je výpočet Hurwitzových subdeterminantů vysokých stupňů velmi zdlouhavý a je i účelné použít, zejména jsou-li koeficienty charakteristické rovnice dány zvláštními čísly, kritérium Routhovo-Schurovo. Toto kritérium, nazývané často *Routhovim-Schurovim algoritmem*, upravil J. Neumann [8.7] a že je podle této úpravy s výhodou použit k určení střední kvadratické plochy odchylky při současném testu stability, jak bude ukázáno v kapitole 9.5.

9.5. Podmínka Hurwitzova kritéria, že všechny koeficienty charakteristické rovnice musí být kladné, zustává v platnosti i v tomto kritéru (je to podmínka nutná, nikoli postačující). Routh dále dokázal, že má-li charakteristická rovnice obvodu všechny kořeny v levé komplexní polohovině, může být se záporou reálnou částí i rovnice stupně $n - 1$, jejíž koeficienty jsou odrozeny zvláštním způsobem z koeficientů původní rovnice. Tak lze redukovat výšetrovanou rovnici až na rovnici druhého stupně. Jestliže se při redukcii neobjeví koeficienty nulové nebo záporné a jsou-li koeficienty poslední rovnice druhého stupně kladné, je obvod stabilní (důkaz lze nalézt v [8.7]).

Koeficienty redukované rovnice počítáme tak, že od každého lichého koeficientu zleva odečteme součin následujícího koeficientu a poměru prvního a druhého koeficientu zleva. Výpočet provádime podle následujícího schématu

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ \hline a_{n-1}; & a_{n-3} - ka_{n-2}; & a_{n-3} \dots a_1 - ka_0 a_0 & & & & \end{array}$$

Koeficienty dané charakteristické rovnice napišeme vedle sebe zleva doprava tak, že zleva je koeficient při nejvyšší mocnině p a každý druhý označíme např. podtržením. Tyto podtržené koeficienty násobíme konstantou k , která je rovna podílu prvého a druhého koeficientu zleva. Součin odečteme od předcházejícího koeficientu zleva. Dostaneme koeficienty nové rovnice, jejíž stupeň je o jedničku nižší. Jsou-li všechny nové koeficienty kladné, opakujieme postup tak dlouho, až dostaneme tři koeficienty, které odpovídají rovnici druhého stupně.

Pro tuto rovnici je podmínka stability řešení $a_i > 0$ $i = 0, 1, 2$, podmínkou nutnou i postačující. Jsou-li tedy i tyto koeficienty kladné, je obvod stabilní. Objeví-li se v průběhu redukce charakteristické rovnice nulový nebo záporný koeficient, přerušíme dálší výpočet, ohvod je nestabilní.

Uvedeným způsobem lze odvodit již známé podmínky stability např. pro rovnici třetího stupně:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & a_3 \\ \hline a_2; & a_1 - a_0 \frac{a_3}{a_2} & a_0 \frac{a_3}{a_2} & & & & a_2 \\ a_3 & a_2 - a_0 \frac{a_3}{a_2} & & & & & \end{array}$$

Jsou-li koeficienty a_2 až a_3 kladné, mohl by být záporný jediný druhý koeficient poslední rovnice. Abý byl obvod stabilní, musí být

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

Tuto podmínku ještě již odvodili pomocí Hurwitzova kritéria.

Algebraická kritéria lze použít pouze u lineárních regulačních obvodů, jejichž charakteristická rovnice je algebraickou rovnici. Nelze jimi řešit otázky stability lineárních obvodů s dopravním zpožděním, neboť charakteristická rovnice je transcendentní.

Stanovení stability takového obvodu bude probíhat později.

2. Kritérium Michajlovovo-Leonhardovo

Než přistoupíme k formulaci tohoto kritéria stability, uvedeme tzv. princip argumentu, známý z teorie funkcií komplexní proměnné.

Míjeme charakteristickou rovnici (297) někoho stupně s reálnými koeficienty

$$H(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

Mnohočlen $H(p)$ lze psát ve tváru součinu jednoduchých součinitelů

$$H(p) = a_n (p - p_1) (p - p_2) \dots (p - p_s) \quad (303)$$

kde p_i jsou reálné anebo komplexní kořeny charakteristické rovnice $H(p) = 0$.

Dosadíme-li do rovnice (303) za $p = j\omega$, dostaneme

$$H(j\omega) = a_n(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n) \quad (304)$$

Komplexní výraz $(j\omega - p_i)$ je v komplexní rovině p znázorněn vektorem, jehož počátek je v bodě p_i a konec na imaginární ose v bodě $j\omega$ (obr. 85).

Argument komplexního výrazu (304) je

$$\arg H(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg (j\omega - p_i) \quad (305)$$

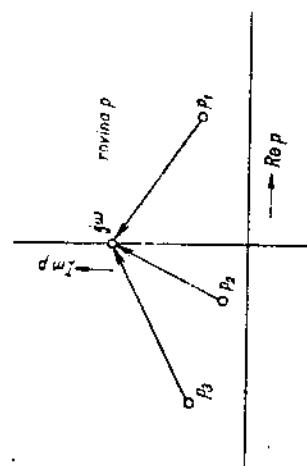
Měříme-li ω v mezích od $-\infty$ do $+\infty$, tj. $-\infty < \omega < \infty$, změní se argument komplexního výrazu (304) o

$$\Delta \arg H(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg (j\omega - p_i) \quad (306)$$

Obr. 85. Znázornění vektorů $(j\omega - p_i)$ v komplexní rovině

kde $\Delta \arg H(j\omega)$ jsme označili výslednou změnu.

Tato změna závisí na tom, zda kořeny polynomu $H(p)$ (charakteristické rovnice) leží v pravé nebo levé komplexní polovině p . Leží-li kořen p_i v levé polovině (obr. 86a), otáčí se konec vektoru $(j\omega - p_i)$ pro $-\infty < \omega < \infty$



podél imaginární osy zdola nahoru a otocí se o úhel $+\pi$. Je tedy změna argumentu komplexního čísla (vektoru) $(j\omega - p_i)$

$$\Delta \arg (j\omega - p_i) = +\pi \quad (307)$$

Leží-li kořen p_i v pravé komplexní polovině (obr. 86b), lze analogicky dokázat, že změna argumentu tohoto vektora pro $-\infty < \omega < +\infty$ je

$$\Delta \arg (j\omega - p_i) = -\pi \quad (308)$$

Nech má rovnice $H(p) = 0$ m kořenů v pravé komplexní polovině a. $(n - m)$ kořenů v levé polovině. Potom na základě výrazu (306), (307) a (308) dostaneme

$$\arg H(j\omega) = (n - m)\pi - m\pi = (n - 2m)\pi \quad (309)$$

Výraz (309) nazýváme princip argumentu. Změna argumentu $H(j\omega)$ pro $-\infty < \omega < +\infty$ je rovna rozdílu mezi počtem kořenů charakteristické rovnice $H(p) = 0$, ležících v levé polovině ($n - m$) a počtem kořenů, ležících v pravé polovině (m), násobených π .

Zdůrazníme zde ještě nutnost podmínky záporných reálných částí kořenů charakteristické rovnice $H(p) = 0$, která spočívá v kladných koeficientech charakteristické rovnice (jak bylo již uvedeno v části o algebraických kritériích). Protože pro reálné kořeny

$$p_i = -c_i; \quad p - p_i = p + c_i \quad (c_i > 0)$$

a pro komplexně sdružené kořeny

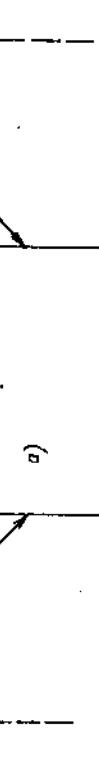
$$p_{i+1} = -c_i \pm jc_i$$

je $(p - p_i)(p - p_{i+1}) = (p + c_i - jc_i)(p + c_i + jc_i) = (p + c_i)^2 + c_i^2$, potom po dosazení $(p - p_i)$ do výrazu (303) a odstranění závorek dostaneme pro $c_i > 0$ minohoděn s kladnými koeficienty (je-li $c_i < 0$, lze bez újmy obecnosti vynasobit mnohočlen $H(p)$ zápornou jedničkou). Je tedy obvod, jehož charakteristická rovnice je dáná výrazem (297) a některý z koeficientů a_k nulový nebo záporný, nestabilní nezávisle na tom, jaké jsou ostatní koeficienty.

Geometrickou interpretací vztahu (309) je Michajlovovo-Leonhardovo kritérium stability [8.4, 8.6]. Leží-li všechny kořeny charakteristické rovnice (297) lineárního regulačního ohvodu v levé komplexní polovině p , potom $m = 0$ a podle vztahu (309)

$$\Delta \arg H(j\omega) = n\pi.$$

Z toho vyplývá, že lineární regulační ohvod je stabilní tehdy a jen tehdy, když se argument vektora $H(p)_{p=j\omega}$ při narůstání ω od $-\infty$ do $+\infty$ přesně o $n\pi$, kde n je stupeň charakteristické rovnice.



Obr. 86. Pohyb konců vektorů $(j\omega - p_i)$ při změně ω

Je vidět, že $n \neq 0$ je největší možná změna argumentu $H(j\omega)$. Geometrické místo bodů, které ryvají konci vektoru $H(j\omega)$ při $-\infty < \omega < \infty$ se nazývá hodografem vektora $H(j\omega)$ (někdy též zkrátkovou křivkou). Tento hodograf je pouze geometrickou interpretací a nijak nesouvisí s frekvenční charakteristikou regulačního obvodu (než jej námířit).

Rovnice geometrického místa (hodografu) dostaneme, dosadíme-li do charakteristické rovnice regulačního obvodu $p = j\omega$, tj.

$$H(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0 = \\ = U(\omega) + jV(\omega) \quad (310)$$

kde

$$U(\omega) = a_0 - a_1\omega - a_2\omega^2 - a_3\omega^3 - \dots - \dots, \quad (311)$$

$$V(\omega) = a_1\omega - a_2\omega^2 - a_3\omega^3 - \dots + \dots \quad (312)$$

Z výrazu (311) a (312) vyplývá, že $\operatorname{Re} H(j\omega) = U(\omega)$ je sudou funkcí ω a $\operatorname{Im} [H(j\omega)] = V(\omega)$ je lichou funkcí, tj. platí

$$U(-\omega) = U(\omega)$$

$$V(-\omega) = -V(\omega)$$

Znamená to, že $H(j\omega)$ a $H(-j\omega)$ jsou komplexně sdruženými veličinami a platí tedy

$$\Delta \arg H(j\omega) = \Delta \arg H(j\omega) \quad (313)$$

a rovnici (309) lze též psát ve tvaru

$$\Delta \arg H(j\omega) = n \frac{\pi}{2} \quad (314)$$

Na základě výrazu (313) lze formulovat Michajlovovo-Leonhardovo kritérium stability lineárních regulačních obvodů:

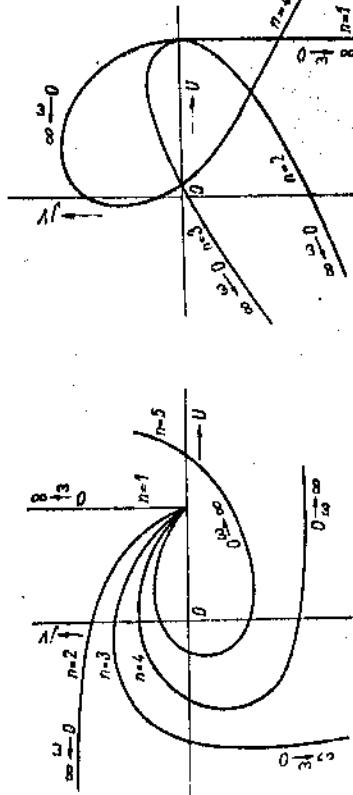
Lineární regulační obvod někoho rádu je stabilní, ažož ji se při změně ω od nuly do nekonečna vektor $H(j\omega)$ v kladném smyslu o úhel $n \frac{\pi}{2}$, kde n je stupeň charakteristické rovnice.

Podmínky stability lze formulovat též takto:

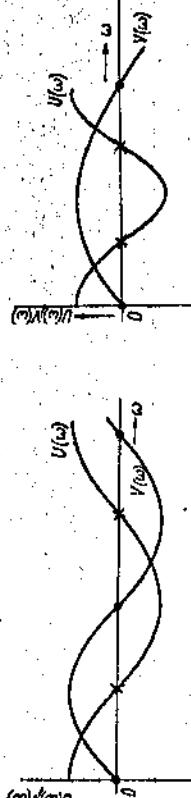
Lineární regulační obvod je stabilní, jestliže hodograf $H(j\omega)$ pro $0 < \omega < \infty$ začíná na reálné osi a projde postupně v kladném smyslu n kružnic sestřídáné reálnou a imaginární osu.

Na obr. 87 jsou příklady průběhu hodografií stabilních obvodů prvního až pátého rádu, na obr. 88 průběh hodografiu pro nestabilní obvody.

Podmínu, aby hodograf $H(j\omega)$ proběhl v kladném směru v kvadrantu postupně za sebou, lze formulovat ještě jinak: Obvod bude stabilní, jestliže pro $U(0) > 0$ a $\left(\frac{dV}{d\omega}\right)_{\omega=0} > 0$ máji rovnice $U(\omega) = 0$ a $V(\omega) = 0$ všechny ko-



Obr. 87. Hodografiy stabilních obvodů



Obr. 88. Hodografiy nestabilních obvodů

řeny reálné a jejich hodnoty se střídají, tj. mezi dvěma sousedními kosenými rovnici $U(\omega) = 0$ leží jeden kořen rovnice $V(\omega) = 0$, obr. 89 (stabilní obvod) a obr. 90 (nestabilní obvod).

Podle průběhu hodografiu $H(j\omega)$ a také podle průběhu křivek $U(\omega) = f_1(\omega)$ a $V(\omega) = f_2(\omega)$ lze zjišťovat, jak se mění bezpečnost ve stabilitě a chování regulačního obvodu. Procháží-li hodograf $H(j\omega)$ počátkem souřadného systému (U, V) , je obvod na mezi stability a rovnice $U(\omega) = 0$ a $V(\omega) = 0$ máji jeden společný kořen.

Charakteristický mnohočlen $H(p)$ uzavřeného regulačního obvodu

$$H(p) = 1 + F(p) = 1 + \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{N(p) + M(p)}{N(p)} = 0$$

Odtud vyplývá, že lze psát

$$H(p) = N(p) + M(p) = 0$$

Je-li obvod jednosmýškový, je

$$N(p) = \prod_{i=1}^s n_i(p)$$

$$M(p) = \prod_{i=1}^r m_i(p)$$

Hodografy $n_i(j\omega)$ a $m_i(j\omega)$ jsou obvykle známé a pro typové členy mají velmi jednoduchý tvar. Z toho vyplývá, že při konstrukci hodografu $H(j\omega)$ je nutno:

- a) sestrojit hodograf $N(j\omega)$, jehož každý bod je dán součinem vektorů $n_i(j\omega)$;
- b) sestrojit hodograf $M(j\omega)$, jehož každý bod je dán součinem vektorů

c) setřít vektory $N(j\omega)$ a $M(j\omega)$ pro všechny hodnoty ω . V případě, že $M(j\omega) = K$, tj. nezávisí na ω , konstrukce se zjednoduší. Poslední dvě operace se zaměň prostým posunem hodografu $N(j\omega)$ napravo o velikostu K rovnoběžně s imaginární osou, nebo (o tož je totiž posunem imaginární osy nalevo o velikostu K). Tento skutečnosti lze využít k určení kritického statického zasílení K_{tr} , při kterém je obvod na mezi stability. Sestražime v takovém případě hodograf

$$H(j\omega) = N(j\omega) + K_{tr}$$

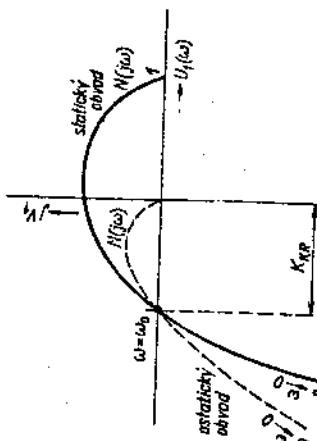
$$N(j\omega) = a_1(j\omega)^s + a_{s-1}(j\omega)^{s-1} + \dots \\ + \dots + a_1(j\omega) + a_0 = U_1(j\omega) + jV_1(j\omega)$$

při čemž

Pro jednoduché statické regulační obvody je $a_0 = 1$, pro astatické je $a_0 = 0$, K je statické zasílení obvodu. Hodograf $N(j\omega)$ má tedy tvar podle obr. 91. Abychom získali hodograf $H(j\omega)$, posuneme imaginární osu vlevo o hodnotu K . Z obr. 91 vyplývá, že obvod bude na mezi stability, je-li $K = K_{tr}$, při kterém hodograf $N(j\omega)$ projde počátkem souřadnic. Velikost kritického zasílení lze tedy určit z rovnice

$$U_1(\omega_0) = K_{tr}; \quad V_1(\omega_0) = 0$$

kde ω_0 je velikost parametru ω , odpovídající průsečíku hodografu $N(j\omega)$ s reálnou osou.



Obr. 91. Průběh hodografu $N(j\omega)$ (jmenovatele přenosu pro $p = j\omega$)

3. Nyquistovo kritérium (frekvenční kritérium)

V roce 1932 formuloval Nyquist kritérium stability pro zesilovače se zpětnou vazbou, založené na frekvenčních charakteristikách obvodu. K výsledné stabilitě uzavřeného regulačního obvodu stačí znát frekvenční charakteristiku otevřeného obvodu. Tuto charakteristiku je možno, jak známo, získat analyticky nebo experimentálně. Tato skutečnost velmi zryhodňuje Nyquistovo kritérium ve srovnání s ostatními, neboť lze vycházet při jeho použití z experimentálně zjištěných dat.

Charakteristická rovnice uzavřeného regulačního obvodu je dána výrazem

$$1 + F(p) = 0$$

kde $F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ je přenos otevřeného regulačního obvodu,

$N(p)$ a $M(p)$ jsou mnohočleny, přičemž stupně polynomu $N(p)$ je n (rád regulačního obvodu) a stupně polynomu $M(p)$ je m .

Při $m \leq n$; když tomu tak nebylo, tj. $m > n$, bylo by možno oddělit složky, které obsahují mocniny p , tj. na výstupu obvodu v otevřeném stavu byly Diracovy impulsy. Přivedeme-li na výstup takového obvodu jednotkový skok, objeví se na výstupu impulsní funkce, což nemá fyzikálně možné.

Z uvedeného vyplývá, že stupně charakteristické rovnice uzavřeného regulačního obvodu

$$1 + F(p) = 1 + \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{N(p) + M(p)}{N(p)} = 0$$

je také n . Charakteristickou rovnici uzavřeného regulačního obvodu příme obvykle ve tvaru

$$N(p) + M(p) = 0 \quad (315)$$

Jak jíž bylo řečeno, lze Nyquistovým kritériem usuzovat o chování lineárního regulačního obvodu v uzavřeném stavu podle jeho chování v otevřeném stavu. Budeme uvažovat tří případy:

- a) obvod v otevřeném stavu stabilní,
- b) obvod v otevřeném stavu nestabilní,
- c) obvod v otevřeném stavu neutrální.

Při důkazu kritéria stability ve všech třech případech použijeme princip argumentu, uvedeného v kap. 8.22.

Ad a) Je-li obvod v otevřeném stavu stabilní, platí podle (313)

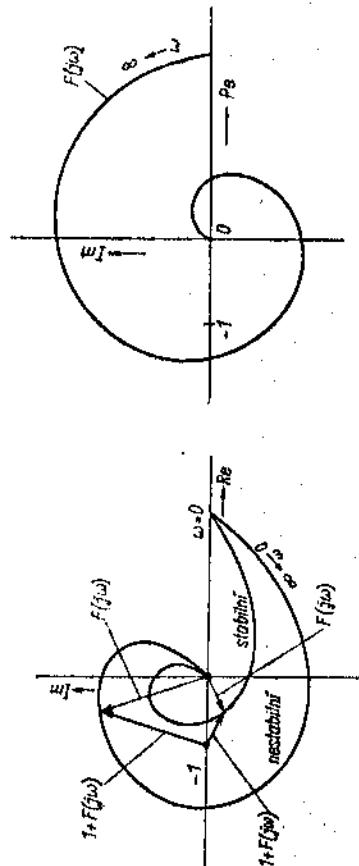
$$\Delta \arg N(j\omega) = \pi - \frac{\pi}{2} \quad (316)$$

Má-li být uzavřený obvod těž stabilní, musí být

$$\Delta \arg [N(j\omega) + M(j\omega)] = n \frac{\pi}{2} \quad (317)$$

Na základě (316) a (317) lze soudit o příslušku argumentu charakteristického mnohočlenu $[1 + F(p)]$. Pro uvedený případ

$$\begin{aligned} \Delta \arg [1 + F(j\omega)] &= \Delta \arg \frac{N(j\omega) + M(j\omega)}{N(j\omega)} = \\ &= \Delta \arg [N(j\omega) + M(j\omega)] - \Delta \arg N(j\omega) = 0 \end{aligned}$$



Obr. 92. Frekvenční charakteristika stabilito a nestabilito regulačního obvodu

To znamená, že uzavřený regulační obvod je stabilní tehdy a jen tehdy, je-li argument výrazu $[1 + F(j\omega)]$ pro $0 < \omega < \infty$ roven nule.

Výraz $[1 + F(j\omega)]$ lze geometricky interpretovat. $F(j\omega)$ je frekvenční přenos, jehož grafickým znázorněním je frekvenční charakteristika otevřeného regulačního obvodu. Výraz $[1 + F(j\omega)]$ je v tom případě vektor, jehož počátek je v bodě $(-1; 0)$ a konec leží na frekvenční charakteristice, viz obr. 92. Má-li být splněna podmínka (317) a obvod v uzavřeném stavu být stabilní, musí ležet bod $(-1; 0)$ vně frekvenční charakteristiky otevřeného regulačního obvodu.

Ad b) Obvody, které obsahují nestabilní členy, mohou být v otevřeném stavu nestabilní. V takovém případě nelze frekvenční charakteristiku změnit a je ji nutno sestrojit z rovné obvodu. Nechť je obvod v otevřeném stavu nestabilní a jeho charakteristická rovnice má m kořenu v pravé polovině. Podle (309) je

$$\Delta \arg N(j\omega) = (n - 2m) \frac{\pi}{2}$$

Má-li být uzavřený obvod stabilní, musí být splněna podmínka

$$\Delta \arg [N(j\omega) + M(j\omega)] = n \frac{\pi}{2} \quad (318)$$

V tomto případě je

$$\begin{aligned} \Delta \arg [1 + F(j\omega)] &= \Delta \arg \frac{[N(j\omega) + M(j\omega)] - \arg N(j\omega)}{0 < \omega < \infty} = \\ &= n \frac{\pi}{2} - (n - 2m) \frac{\pi}{2} = \frac{m}{2} 2\pi \end{aligned} \quad (318)$$

Bude tedy uzavřený regulační obvod stabilní v takovém případě tehdy a jen tehdy, jestliže frekvenční charakteristika otevřeného obvodu $F(j\omega)$ obhaje $\frac{m}{2}$ krát bod $(-1; 0)$ v kladném směru; m je počet kořenů charakteristické rovnice otevřeného regulačního obvodu v pravé komplexní polovině.

Na obr. 93 je znázorněn průběh frekvenční charakteristiky regulačního obvodu, který je v otevřeném stavu nestabilní a stabilizuje se uzavřením hlavní smyčky. Frekvenční charakteristiku lze v tomto případě určit z rovnice obvodu. Dva kořeny charakteristické rovnice otevřeného obvodu leží v pravé komplexní polovině, tj. m = 2. Frekvenční charakteristika obhájí jednu

$$\left(\frac{m}{2} = 1 \right) \text{ bod } (-1; 0) \text{ v kladném směru.}$$

Ad c) Je-li regulační obvod astatický (tj. v otevřeném stavu neutrální), potom při $\omega = 0$ je změna argumentu jmenovatele frekvenčního přenosu $N(j\omega) = (j\omega)N_1(j\omega)$ nezářída.

Charakteristická rovnice otevřeného obvodu $N(p) = 0$ má nulové kořeny. Abysto možno formulovat kritérium stability obdobným způsobem jako v předchozích případech, je nutno nulové kořeny zahrnout podmíněn do levé výměny. Frekvenční charakteristika otevřeného obvodu leží v tomto případě v pravé komplexní polovině a při změně ω od $-\infty$ do $+\infty$ obchází počátek souřadnic zprava po polokružnici o nekonečné malém poloměru, obr. 94. Potom

$$p = qe^{i\vartheta}$$

kde q je rádius vektor,

jθ polární úhel, při čemž q → 0, $-\pi < \vartheta < \pi$.

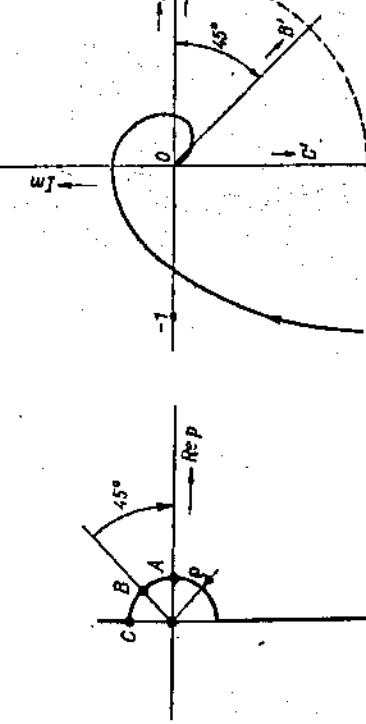
V tomto případě všechny nulové kořeny charakteristiky rovnice otevřeného obvodu $p'N_1(p) = 0$ budou ležet v levé polovině, když do ní zahrneme i oblast vytvořenou polokružnici o poloměru q kolem počátku a můžeme tedy za těchto podmínek považovat vyšetřovaný astatický obvod v otevřeném stavu nikoli za neutrální, ale stabilní.

Otevřený obvod s astatismem prvního řádu ($\nu = 1$) má očekávaný přenos

$$F(p) := \frac{M(p)}{pN_1(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{p(a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0)} \quad (320)$$

a frekvenční přenos

$$F(j\omega) = \frac{M(j\omega)}{(j\omega)N_1(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)[a_m(j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0]} \quad (321)$$



Obr. 94. Podmíněns zahrnutí nulových kořenů do levé komplexní poloroviny

Frekvenční charakteristika má pro $j\omega \neq 0$ průběh podle obr. 95, vyznačený písmenem čárou. Pro $p \rightarrow 0$ platí podle výrazu (320)

$$\lim_{p \rightarrow 0} F(p) = \frac{b_0}{pa_0} \quad (322)$$

Dosadime-li ze vztahu (319) za $p = qe^{j\theta}$, dostaneme

$$\lim_{p \rightarrow 0} F(p) = \frac{b_0}{a_0 q} e^{-j\theta}$$

a oblouk $90^\circ \widehat{ABC}$ v obrazku 94 o nekonečně malém poloměru se zobrazí obloukem $A'B'C'$ o nekonečně velkém poloměru, obr. 95. Vzhledem k tomu, že hodnota $F(p)$ je sdružená k hodnotě $F(p)$, tj.

$$F(\overline{p}) = \overline{F(p)}$$

není nutno uvažovat v daném případě celý oblouk $-\pi < \beta < \pi$ a konstruovat charakteristiku pro $\text{Im}[p] \geq 0$, nýbrž ji doplňme zdraždovým obrazem vlny reálné osy.

V uvažovaném případě frekvenční charakteristiky otevřeného astatického obvodu neobkloupuje bod $(-1, j0)$; je astatický regulační obvod stabilní. Uváhu lze bez obtíže rozšířit na obvody s astatismem všeho řádu a závěry jsou stejně.

V tom případě úhel θ , který je 90° v obr. 94 se zobrazí v úhlu $-\pi - \frac{\pi}{2}$ v obr. 95.

Z uvedeného vyplývá, že astatický regulační obvod (v otevřeném stavu neutrální) bude v uzavřeném stavu stabilní, jestliže frekvenční charakteristika otevřeného obvodu (doplňená obloukem v nekončinu) neobkloupuje bod $(-1, j0)$.

Lze uvést některé další praktické formulace podmínek stability:

Změna argumentu výrazu $[1 + F(j\omega)]$ při $0 < \omega < \infty$ bude nulová, je-li počet přechodů frekvenční charakteristiky přes úsek reálné osy $(-\infty, -1)$ z horní poloroviny do spodní a ze spodní poloroviny do horní stejný. Změna argumentu bude rovna

$$\pm \frac{m}{2} 2\pi, \text{ je-li rozdíl mezi počtem přechodů roven } \pm \frac{m}{2}.$$

Obr. 96. Frekvenční charakteristika regulačního obvodu, uzavřeném hlavní smyčky

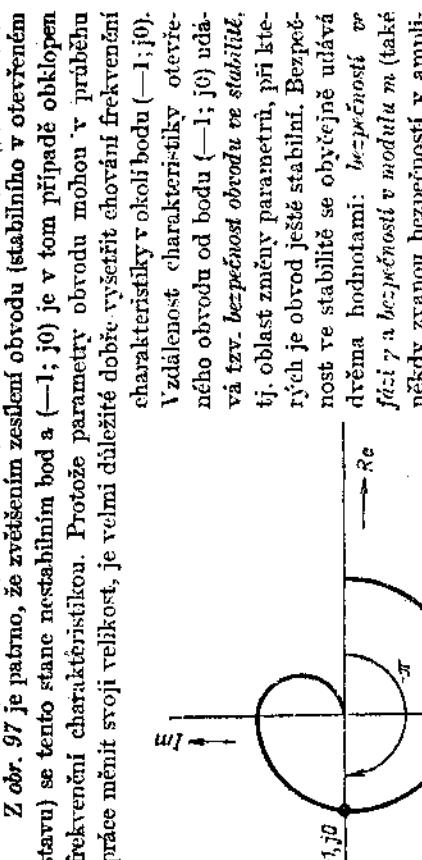
Přechod frekvenční charakteristiky $F(j\omega)$ z horní poloroviny do spodní při rostoucím ω budeme povážovat za kladný a přechod ze spodní poloroviny do horní za záporný. V tom případě lze výše uvedené Nyquistovo kritérium formulovat takto:

Regulační obvod je stabilní tehdy a jen tehdy, je-li rozdíl mezi kladnými a zápornými přechody frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu přes úsek $(-\infty, -1)$ reálné osy roven $\frac{m}{2}$, kde m je počet kořenů charakteristické rovnice

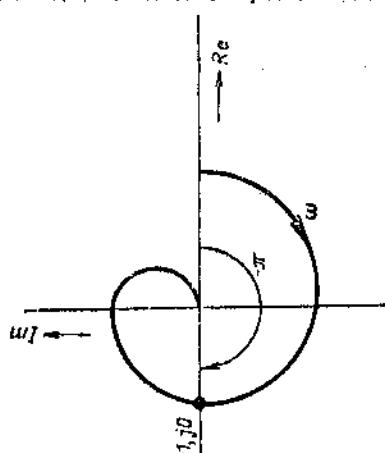
otevřeného obvodu, kladných v pravé polovině. Pro kladné m je však nutné uvažovat obě vlny frekvenční charakteristiky pro $-\infty \leq \omega \leq \infty$, viz (309).

Je-li $m = 0$, jde o stabilní nebo neutrální obvod a ten bude stabilní, je-li rozdíl mezi kladnými a zápornými přechody frekvenční charakteristiky přes úsek $(-\infty, -1)$ roven nule. Na obr. 96 je frekvenční charakteristika neutrálního otevřeného regulačního obvodu, jehož charakteristická rovnice má dva kořeny v pravé polorovině ($m = 2$). Tato charakteristika má dva přechody kladné a jeden přechod záporný, rozdíl mezi nimi je $2 - 1 = 1$. Obrovský, který je v otevřeném stavu nestabilní ($m = 2$), je stabilní v uzavřeném stavu.

Procházejí frekvenční charakteristikou bodem $(-1, j0)$, je obvod na mezi stability. Amplituda frekvenční charakteristiky je rovna jedné a fáze (zpoždění výstupu za vstupem) $-\pi$, obr. 97.



Obr. 97. Fázový charakteristický obvod, který je namezí stability



Obr. 98. Bezpečnost ve stabilitě (v modulu m a ve fázi γ)

Tento kmitočet je dán přísečkem jednotkové kružnice se středem v počátku souřadnic s fázově charakteristikou otevřeného obvodu, obr. 98. Bezpečnost v modulu je dána převrácenou hodnotou amplitudy frekvenční charakteristiky pro kmitočet, pro který $\Theta(\omega) = \pi$ (obr. 98). Bezpečnost v modulu je dána velikostí m . Praktické hodnoty bezpečnosti ve fázi jsou $\gamma = 40^\circ$ až 60° . Při těchto hodnotách nesmí frekvenční charakteristika procházet čárkovanou oblastí na obr. 99.

Bod A je srovnány s bodem B vzhledem k bodu $(-1; j0)$.

4. Určení stability z frekvenčních charakteristik v logaritmických souřadnicích

Z obr. 97 je patrné, že zvětšením zesílení obvodu (stabilního v otevřeném stavu) se tento stane nestabilním bodem $a = (-1; j0)$ je v tom případě obklopen frekvenční charakteristikou. Protože parametry obvodu mohou v průběhu práce měnit svoji velikost, je velmi dležitě dobré vyšetřit charakteristiku charakteristiky v okolí bodu $(-1; j0)$. Vzdálenost charakteristiky otevřeného obvodu v polárních souřadnicích s úsečkou reálné osy $(-\infty, -1)$ odpovídají v logaritmických souřadnicích body, kde amplitudová frekvenční charakteristika

$$20 \log |F(j\omega)| = |P(j\omega)|_{dB} > 0$$

a fázová frekvenční charakteristika

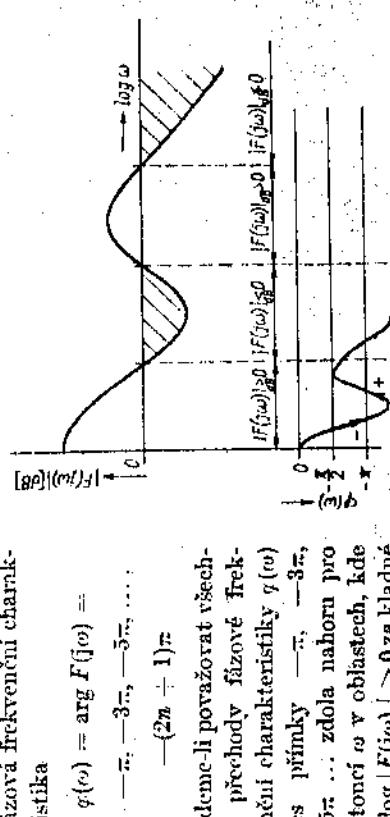
$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg F(j\omega) = \\ &= -\pi, -3\pi, -5\pi, \dots, -(2n+1)\pi \end{aligned}$$

Budeme-li považovat všechny přechody fázové frekvenční charakteristiky $\varphi(j\omega)$ přes přímky $-\pi, -3\pi, -5\pi, \dots$ zdola nahoru pro různouci ω v oblastech, kde $20 \log |F(j\omega)| > 0$ za každné a přechody opačným směrem za záporné (obr. 100), lze formulovat kritérium

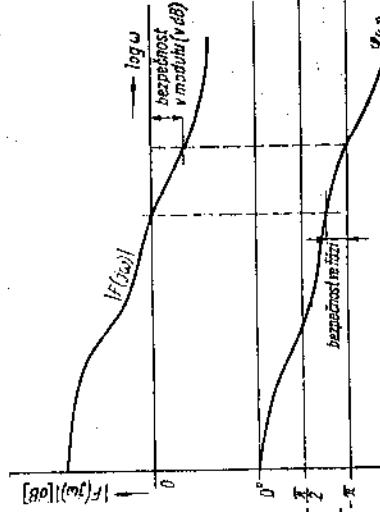
stability, s omezením uvedeným na str. 161, takto:

Regulační obvod bude stabilní, je-li rozdíl mezi kladnými a zápornými přechody frekvenční charakteristiky přes přímky $-\pi, -3\pi, \dots, -m\pi$, kde m je počet kokeren charakteristiky rovnice otevřeného obvodu, ležících v pravé polovině.

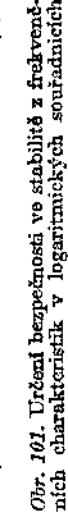
Z frekvenčních charakteristik v logaritmických souřadnicích lze stanovit velmi dobré a rychlé bezpečnostní kriterium. Obr. 101. Určení bezpečnosti ve stabilitě z frekvenčních charakteristik v logaritmických souřadnicích



Obr. 99. Vynezení oblasti v komplexní rovině E-ω pro dané hodnoty bezpečnosti v modulu m a ve fázi γ



Obr. 100. Určení stability obvodu z frekvenčních charakteristik v logaritmických souřadnicích



Obr. 101. Určení bezpečnosti ve stabilitě z frekvenčních charakteristik v logaritmických souřadnicích

počtu ve stabilitě (ponocí pojmu, definovaných v kap. 8.23), viz obr. 101.

Jak již bylo uvedeno, existuje u obvodu s minimální fází jednoznačný vztah mezi amplitudou a fázovou frekvenční charakteristikou, který odvozil Bode. Z tohoto vztahu vyplývá, že má-li amplitudová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích sklon 0 dB/dek, je v daném pásmu fáze $\varphi(\omega) = 0^\circ$, má-li amplitudová charakteristika v celém frekvenčním pásmu sklon ± 20 dB/dek, je fázový úhel $\varphi(\omega) = \pm 90^\circ$, má-li sklon ± 40 dB/dek, je fázový úhel $\varphi(\omega) = \pm 180^\circ$ atd. Je-li tedy přenosová funkce otevřeného obvodu funkce s minimální fází, má uzávřený ohvod potichem bezpečnost ve stabilitě pouze tehdy, jestliže amplitudová frekvenční charakteristika otevřeného obvodu má v oblasti příseku s osou 0 dB sklon -20 dB/dek (a nikoli větší, např. -40 dB/dek). V tom případě bude fáze v této oblasti $\varphi(\omega) \leq -90^\circ$.

5. Zjištování oblasti stability v závislosti na parametrech regulačního obvodu

Kritériem Michajlovým-Leonhardovým a Nyquistovým lze snáze určit vliv některého z parametrů na stabilitu obvodu, než je to možno provést kritériem Hurwitzovým nebo Routhovým-Schurovým. Přesto je však obyčejně potřeba ke zjištění vlivu některého z parametrů obvodu na jeho stabilitu sestrojít znalecký křivek pro různé hodnoty tohoto parametru.

J. I. Nejmark [8.8] vypracoval v roce 1947 metodu zjišťování stability lineárních systémů, která jednáne určitým způsobem zohlednuje dříve uvedená kritéria stability, jednak umožňuje při sestrojení jedné křivky určit všechny hodnoty parametru, při kterých systém zůstává stabilní. Tato metoda se v některé literatuře nazývá *rozklad D*. D

Jak již bylo uvedeno, má charakteristická rovnice *n*tého stupně

$$H(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0 = 0$$

(tento tvor platí pro $a_n = 1$ nebo lze na něj charakteristickou rovnici převést dělením celé rovnice koeficientem a_n) *n* kořenů. Obecně při nějakých hodnotách koeficientů a_n až a_0 mohou ležet tyto kořeny v pravé i levé komplexní polovině *p*. Leží-li v pravé polovině *m* kořenů, potom v levé polovině je jich (*n* — *m*). Při změně koeficientů charakteristické rovnice se rozložení kořenů v komplexní rovině bude spojité měnit. Přechod kořenů z pravé do levé poloviny se děje tak, že existuje určitý vztah mezi koeficienty charakteristické rovnice, při kterém jeden páár kořenů padne právě na imaginární osu (ve zvláštním případě padne jeden kořen do počátku komplexní roviny *p*) a hodnoty těchto kořenů splňují rovnici

$$H(j\omega) = (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (23)$$

Rovnice (23) odpovídá v prozrazeném prostoru koeficientů $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ pro danou hodnotu ω bodu a pro značku ω od $-\infty$ do $+\infty$ nadplocha.

Při změně parametrů obvodu doje ke změně koeficientů charakteristické rovnice. V prostoru koeficientů této změně odpovídá pohyb a při určité velikosti koeficientů protmene nadplochu $H(j\omega) = 0$. Znamená to, že jeden nebo dvojice komplexně sdružených kořenů přejde zlevé (pravé) poloviny do pravé (levé) poloviny.

Povrchněme si blíže případu pro $n = 3$, kdy charakteristická rovnice má tvar

$$H(p) = p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0$$

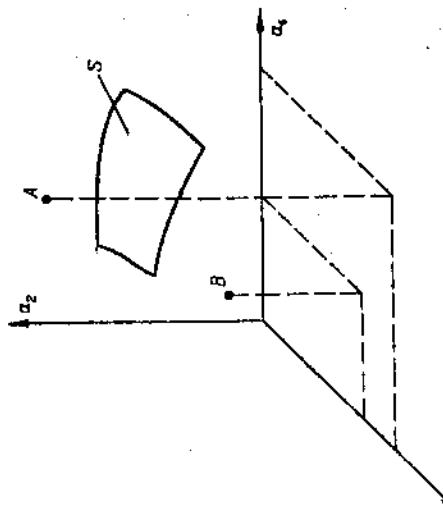
Každé hodnotě koeficientu a_0, a_1, a_2 v trojrozměrném prostoru koeficientů (obr. 102) odpovídá bod. Tento hodnotě koeficientu bod. Tento hodnotě koeficientu rovnice odpovídá určité rozložení kořenů charakteristické rovnice v rovině kořenů (obr. 103). Bodu A odpovídají koeficienty a_1, a_2, a_3 , bodu B koeficienty $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Při určitých hodnotách koeficientů jeden nebo dvojice komplexně sdružených kořenů padne na imaginární osu, tj. hodnoty kořenů jsou buď 0 nebo $\pm j\omega_0$ a odpovídající bod v prostoru koeficientů bude vypořádat rovnici

$$H(j\omega_0) = (j\omega_0)^3 + a_2(j\omega_0)^2 + a_1(j\omega_0) + a_0 = 0$$

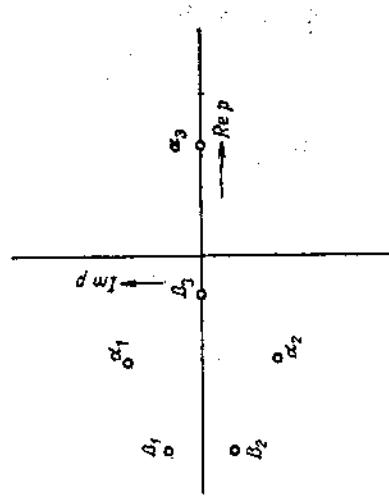
Vztah mezi koeficienty charakteristické rovnice, při kterém se jeden nebo více kořenů nachází na imaginární ose, je dán rovnici

$$H(j\omega) = (j\omega)^3 + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0 = 0$$

Této rovnici odpovídá plocha S, jejíž část je znázorněna na obr. 102.

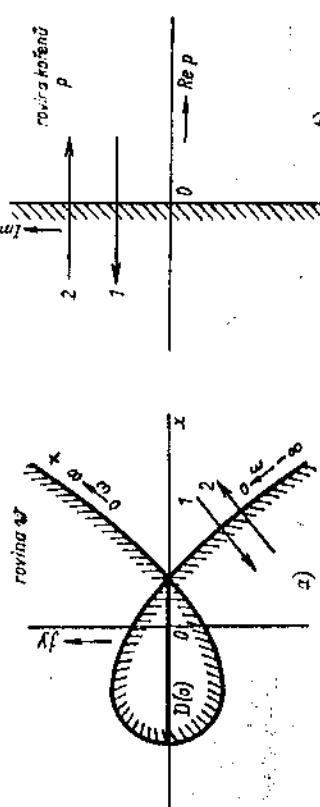


Obr. 102. Prostor koeficientů charakteristickou rovnici třetího stupně pro charakteristickou rovnici třetího stupně



Obr. 103. Rozložení kořenů charakteristické rovnice

Při změně koeficientů charakteristické rovnice se mění její kořeny a padou na imaginární osu pouze tehdy, padne-li bod v prostoru koeficientů na plochu S . Přejde-li bod z jedné strany plochy S na její druhou stranu, přejde také kořeny z jedné komplexní poloroviny kořenů do druhé. Z toho tedy vyplyvá, že plocha S rozděluje prostor koeficientů na oblasti, kde každému bodu odpovídá charakteristická rovnice třetího stupně, mající určitý počet kořenů v pravé a levé komplexní polorovině kořenů. Označme tyto oblasti $D(m)$ (odtud zmíněný název metody rozkladu D , zavedený Némarkem), kde m je počet kořenů v pravé polorovině. Pro rovnici třetího stupně existují v prostoru koeficientů čtyři oblasti: $D(3)$, $D(2)$, $D(1)$ a $D(0)$. Oblast $D(0)$ je oblastí stability regulařního ohrodu.



Obr. 104. Rozklad D pro jeden parametr

Pro rovnice vyšších stupňů ($n > 3$) je nutno používat n rozdílných prostorů a nadploch, které rozdělují tento prostor. To samozřejmě čení říká velmi složitou a řešení není již názorné. Nemění-li se všechny koeficienty, ale jen některé z nich, např. $a_1, a_2 \dots a_n = \text{konst.}$, dostaneme místo plochy křivku, která je průsečníkem plochy S a plochy $a_n = \text{konst.}$

Přechod přes hranici rozkladu D odpovídá přechodu kořenu rovnice, přes imaginární osu. Je tedy rovnici hranice rozkladu D (nadplochy) rovnice (323) dostaneme již z charakteristické rovnice dosazením za $p = jo$. Z toho vyplyvá, že nadplocha je v podstatě zobrazením imaginární osy roviny kořenů v prostoru koeficientů charakteristické rovnice, ale též v prostoru parametru obvodu.

Nejlehodlousí řešení je zjistit vliv změny jednoho parametru na stabilitu obvodu. Obecně budeme poražovat parametr, jehož růl bude zjistovat, komplexní. Dále předpokládejme, že tento parametr je v rovnici (323) obsažen lineárně.

Označme-li parametr w , můžeme charakteristikou rovnici psát ve tvare

$$H(p) = S(p) + wR(p) = 0 \quad (324)$$

kde $S(p)$ a $R(p)$ jsou polynomy p .

Hranice oblasti D jsou dány rovnici

$$H(j\omega) = S(j\omega) + wR(j\omega) = 0 \quad (325)$$

(dále

$$w = -\frac{S(j\omega)}{R(j\omega)} = X + jY \quad (326)$$

$-x < \omega < +\infty$

Při konstrukci hranice rozkladu D stačí sestrojit hranici pro kladná w . Její druhá polorovina pro $\omega < 0$ je zrcadlovým obrazem části hranicí křivky pro $\omega > 0$ vůči reálné ose. Prakticky nás zajímá rozdělení nikoli celé roviny komplexního parametru w , ale pouze kladné části její reálné osy, odpovídající fyzikálně realizovatelné hodnotě parametru w .

Na obr. 104 je jeden z možných případů hranicí křivky. Při změně w od $-x$ do $+\infty$ probíhame v rovně kořen p imaginární osu zdola nahoru a oblast stability zůstává nalevo. Budeme tedy čákovat imaginární osu zleva (obr. 104b).

Hranici čára (obecně plocha) je obrazem imaginární osy komplexní roviny kořenů. Pohybujeme-li se tedy v rovině $(X; jY)$ podél hranicí křivky a w se mění od $-\infty$ do $+\infty$, zůstává oblast parametru w , pro jehož hodnoty je obvod stabilní, také po levé straně hranicí křivky (viz obr. 104a).

Jestliže v rovině w pětřeme hranici čáru ve směru čárkování (šípka 1, obr. 104a), potom v rovině kořen jeden kořen přejde z pravé poloroviny do levé. Přetneme-li v rovině w hranici čáru proti směru čárkování (šípka 2, obr. 104a), potom v rovině kořen jeden kořen přejde z levé poloroviny do pravé. Kontrolu, zda oblast $D(0)$ je skutečně oblastí stability vyžádovaného obvodu, je nutno provést alespoň pro jednu hodnotu parametru w z této oblasti.

V řadě případů je nutno objasnit vliv dvou parametrů na stabilitu obvodu. Budeme předpokládat, že tyto parametry jsou opět v charakteristické rovnici obsaženy lineárně a rovnice má tvar

$$\eta P(p) + \xi Q(p) + R(p) = 0 \quad (327)$$

kde $P(p)$, $Q(p)$ a $R(p)$ jsou polynomy p , η, ξ jsou měnitelné parametry.

Hranice oblasti D v rovinách η a ξ jsou dány rovnici

$$\eta P(j\omega) + \xi Q(j\omega) + R(j\omega) = 0 \quad (328)$$

Označme-li

$$P(j\omega) = P_1(\omega) + jP_2(\omega)$$

$$Q(j\omega) = Q_1(\omega) + jQ_2(\omega)$$

$$R(j\omega) = R_1(\omega) + jR_2(\omega)$$

za rovnici (328) rozdělit na dvě rovnice, položime-li reálnou část a imaginární část rovnou nule. Platí

$$\eta P_1(\omega) + \xi Q_1(\omega) : R_1(\omega) = 0 \quad (330a)$$

$$\eta P_2(\omega) + \xi Q_2(\omega) + R_2(\omega) = 0 \quad (330b)$$

Z těchto dvou rovin lze vypočítat η a ξ :

$$\eta = \frac{D_1}{D} \quad (331)$$

$$\xi = \frac{D_2}{D} \quad (332)$$

kde

$$D := \begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix} \quad (333)$$

$$D_1 := \begin{vmatrix} -R_1(\omega) & Q_1(\omega) \\ -R_2(\omega) & Q_2(\omega) \end{vmatrix} \quad (334)$$

$$D_2 := \begin{vmatrix} P_1(\omega) & -R_1(\omega) \\ P_2(\omega) & -R_2(\omega) \end{vmatrix} \quad (335)$$

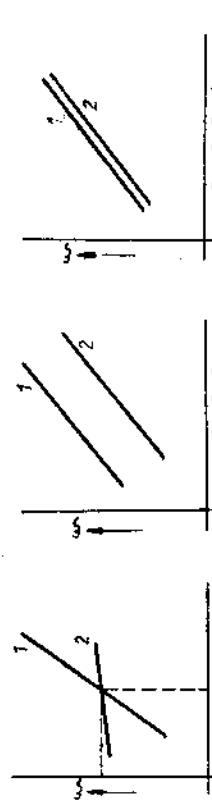
Je-li $D \neq 0$, lze pro všechny hodnoty ω určit z rovnic (331 až 335) veličiny η a ξ a sestrojit v rovině (η, ξ) hranici oblasti D.

Z výrazů (333), (334) a (335) je vidět, že D, D₁ a D₂ jsou lichými funkčemi ω , neboť reálné části $P(j\omega)$, $Q(j\omega)$ a $R(j\omega)$ jsou sudými funkčemi ω , a imaginární části těchto výrazů jsou lichými funkčemi ω . Z toho vyplývá, že veličiny η a ξ dané rovnicemi (331) a (332) jsou sudými funkčemi ω .

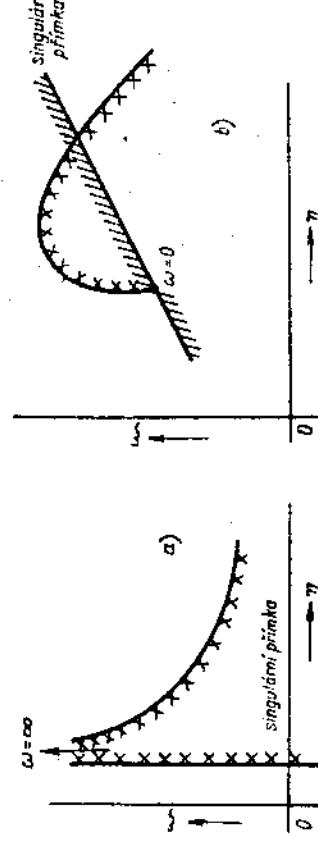
Bliže musíme vysvetlit případ, kdy pro některou hodnotu je $D = 0$. Je-li pro takovou hodnotu ω $D_1 \neq 0$ a $D_2 \neq 0$, leží bod hranice oblasti D mimo rovinu η, ξ v nekonečnu. Jestliže pro tuto hodnotu ω jsou také D_1 a D_2 nulové (je-li $D_1 = 0$, je také $D_2 = 0$), nějso η a ξ definovány (jsou nevrátitelné). V takovém případě jsou totiž rovnice (330a) a (330b) ekvivalentní a určují v rovině (η, ξ) půmku, tj. pro danou hodnotu ω (pro kterou je $D = D_1 = D_2 = 0$) nedostaneme v rovině η, ξ bod, ale celou půmku, kterou nazýváme singulární půmku.

Většinou případu v praxi odpovídají singulární půmky hodnotám $\omega = 0$ a $\omega = \infty$.

V takovém případě koeficienty odpovídající dením a_0 a a_s charakteristické rovnice závisí na η a ξ . Abychom získali rovnice těchto singulárních půmek, musíme tyto koeficienty položit rovně nule. První koeficient (den a_0)



Obr. 105. Řešení rovnic (330a) a (330b)



Obr. 106. Čátkování hranic oblasti D

dá singulární půmku pro $\omega = 0$ a druhý pro $\omega = \infty$.

Uvedené řešení soustavy rovnic (330a) a (330b) lze provést graficky.

Nejsou-li uvedené koeficienty závislé na η a ξ , singulární půmky neexistují.

Na obr. 105 jsou uvedeny půmky I a 2 pro dané hodnoty ω odpovídající rovnici (330a) a (330b) pro případ, kdy

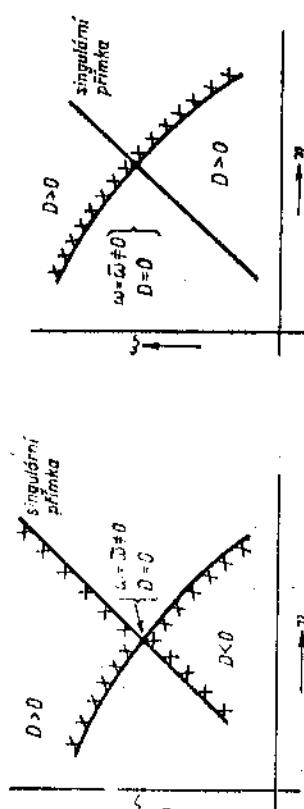
$$D_1 \neq 0 ; \quad D \neq 0$$

$$D_1 \neq 0 ; \quad D = 0$$

$$D_1 = 0 ; \quad D = 0$$

V prvním případě průsečík přímek I a II určuje η a ξ pro danou hodnotu ω , v druhém případě jsou přímky I a II rovnoběžné a hodnoty $\eta = \xi = x_2$ a konečně v třetím případě přímky I a II slyší se, a pro danou hodnotu ω nedostaneme pouze bod, ale přímku.

Hranice oblasti D se čárkuje zleva při oběhu ve směru rostoucích ω , jestliže klární determinant $D > 0$, a zprava, jestli $D < 0$. Vzhledem k tomu, že hranice oblasti D je tečoucí i záporné hodnoty ω (veličiny η a ξ jsou sudými funkemi ω , ale D je funkce lichá), čárkuje se dvakrát z jedné a téže strany.



Obr. 107. Dvojí čárkování hranic oblasti D.

Pro $\omega = 0$ je vždy $D = 0$, a bodem, který odpovídá $\omega = 0$ (také $\eta = x_2$), prochází nejkraťší singulární přímky. Tyto singulární přímky se čárkuji tak, aby čárkované i nečárkované strany přímky i křivky směrovaly k sobě (obr. 106).

V těch případech, kdy pro $\omega = \bar{\omega} \neq 0$, $D_1 = 0$ a D prochází nulou a mění znaménko (tentotéž případ nastává poměrně zřídka), čárkuje se podle výše uvedeného pravidla, ale dvojím čárkováním (obr. 107).

Jestliže pro $\omega = \bar{\omega} \neq 0$, $D_1 \neq 0$ a D prochází nulou, nemění znaménko, singulární přímka se nečárkuje a vynechává se při výšetřování (obr. 108).

Při sestrojování hranic oblasti D pro dva parametry je potřeba správně orientovat osy. Pro uvedený případ zápisu rovnic je nutno veličinu η vynášet na rodotorovou osu a ξ na osu svislou.

Uvedme ještě řešení regulačního obrodu, jehož charakteristická rovnice je

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

Tuto rovnici lze transformovat pomocí substituce

$$p = q \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}}$$

na tvář

$$q^3 + \eta q^2 + \xi q + 1 = 0 \quad (336)$$

kde

$$\eta = \frac{a_2}{a_0} \sqrt[3]{\left(\frac{a_0}{a_3} \right)^2}; \quad \xi = \frac{a_1}{a_0} \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}}$$

Z rovnice (336) vyplývá, že stabilita je dána dráma založenými parametry η a ξ . Sestrojíme hranici oblasti D v rovině koeficientů η a ξ . Dosadíme do rovnice (336)

$$q = j\omega \quad (337)$$

$$(j\omega)^3 + \eta(j\omega)^2 + \xi(j\omega) + 1 = 0$$

Pořád rovnice (329) můžeme psát

$$\begin{aligned} P(j\omega) &= (j\omega)^3 = -\omega^3 & Q(j\omega) &= j\omega & R(j\omega) &= 1 + (j\omega)^2 \\ P_1(\omega) &= -\omega^3 & Q_1(\omega) &= 0 & R_1(\omega) &= 1 \\ P_2(\omega) &= 0 & Q_2(\omega) &= \omega & R_2(\omega) &= -\omega^3 \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} P_1(\omega) & Q_1(\omega) & R_1(\omega) \\ P_2(\omega) & Q_2(\omega) & R_2(\omega) \\ -R_1(\omega) & Q_1(\omega) & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\omega^2 & 0 & \omega \\ 0 & \omega & \omega \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 \quad (338) \\ D_1 &= \begin{vmatrix} -R_1(\omega) & Q_2(\omega) \\ -R_2(\omega) & Q_1(\omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega^2 & \omega \\ \omega & \omega \end{vmatrix} = -\omega \quad (339) \\ D_2 &= \begin{vmatrix} P_1(\omega) & -R_1(\omega) & -\omega^3 - 1 \\ P_2(\omega) & -R_2(\omega) & 0 \\ -R_1(\omega) & -R_2(\omega) & \omega^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\omega^3 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^3 \end{vmatrix} = -\omega^3 \quad (340) \end{aligned}$$

Podle (331) a (332)

$$\eta = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{\omega^2} \quad (341)$$

$$\xi = \frac{D_2}{D} = \omega^2 \quad (342)$$

Rovnice (341) a (342) udávají v parametrickém tvaru rovnice hranice oblasti D. Z rovnice vyplyvá, že

$$\eta \xi = 1 \quad (343)$$

tj. hranice oblasti D je rovnoosou hyperbolou v rovině (η, ξ) , obr. 109.

Obr. 109. Hyperbola

Vysíagradského



Tato hyperbola se někdy v literatuře nazývá *hyperbolou Vysšegradského*. Čárkování je provedeno podle dríve uvedených pravidel. Oblastí stability je oblast ležící nad hyperbolou.

Abychom učili rozdělení oblastí D, vyřešíme bod $\eta = 0, \zeta = 0$. Tomuto bodu odpovídá podle rovnice (336) rovnice

$$q^3 + 1 = 0$$

Tuto rovnici lze psát ve tvaru

$$(q + 1)(q^2 - q + 1) = 0$$

a má dva kořeny v pravé polovině. Naleží tedy bod $\eta = 0, \zeta = 0$ do oblasti D(2) a oblast nad hyperbolou je oblastí D(0), tj. oblasti stability. Singulární přímky v tomto případě chybějí, neboť koeficienty při členu s nejvyšší a nulovou mocninou q nejsou funkciemi η a ζ . Tyž výsledek lze samozřejmě určit jednodušeji např. kritériem Hurwitzovým, podle kterého rovnice (336) s kladnými koeficienty má všechny kořeny v levé polovině, je-li

$$\eta\zeta > 1$$

a mezi stability je dána rovnici

$$\eta\zeta < 1$$

6. Stabilita lineárních regulačních obvodů s dopravním zpožděním

Jak bylo uvedeno v 7. kapitole, je přenos členu s dopravním zpožděním T_a

$$F(p) = e^{-pT_a}$$

Uvažujme regulační obvod, jehož blokové schéma je na obr. III. Přenos otevíreného obvodu bez členu s dopravním zpožděním je $F_1(p)$.

Přenos otevřeného obvodu je

$$F(p) = F_1(p) F_2(p) = F_1(p) e^{-pT_a} \quad (345)$$

Nebude-li obvod obsahovat člen s dopravním zpožděním, bude jeho přenos

$$F_0(p) = \lim_{T_a \rightarrow 0} F(p) = F_1(p) \quad (346)$$

Překvětní přenos analogicky je

$$F(j\omega) = F_1(j\omega) e^{-j\omega T_a} \quad (347)$$

$$\begin{aligned} F_0(j\omega) &= \lim_{T_a \rightarrow 0} F_1(j\omega) e^{-j\omega T_a} = F_1(j\omega) \\ \arg F(j\omega_0) &= \arg F_1(j\omega_0) - \omega_0 T_a \quad (351) \end{aligned}$$

Frekvenční charakteristiku obvodu s dopravním zpožděním lze tedy se stavit tak, že každý vektor frekvenčního přenosu $F_1(j\omega)$ pootočíme o úhel ωT_a v záporném smyslu. S rostoucím úhlovým kmitotetem ω velikost $|F_1(j\omega)|$ roste a pronávazd modul frekvenčního přenosu $F_1(j\omega)$ je pro velké ω obvykle malý.

Charakteristická rovnice uzavřeného regulačního obvodu s dopravním zpožděním

$$1 + F(p) e^{-pT_a} = 0$$

je rovnici transcendentní.

Pro zajištění stability takového obvodu nelze použít algebričních kritérií, a použijeme tedy kritéria Nyquistova:

Regulační obvod s dopravním zpožděním je stabilní, jestliže frekvenční charakteristika otevřeného obvodu $F(j\omega)$ neobkloupejší bod $(-1; j0)$. Předpokládáme přitom, že tentýž obvod bez dopravního zpoždění je v otevřeném stavu stabilní.

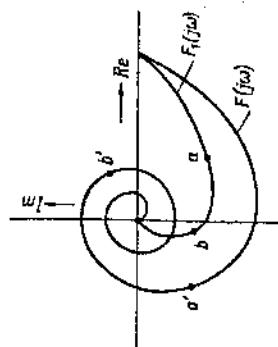
Bylo již uvedeno, že dopravní zpoždění T_a způsobí natačení vektoru frekvenční charakteristiky o úhel ωT_a v záporném smyslu. Může se stát, že pro určitou hodnotu $T_a = T_{01}$ projde frekvenční charakteristika otevřeného obvodu s dopravním zpožděním $F(j\omega)$ bodem $(-1; j0)$. Při tom pro $T_a < T_{01}$ $F(j\omega)$ neobkloupejší bod $(-1; j0)$ a pro $T_a > T_{01}$ obkloupejší bod $(-1; j0)$. To znamená, že pro $T_a = T_{01}$ je obvod na mezi stability. Při dalším zvětšování T_a ($T_a > T_{01}$) bod $(-1; j0)$ nadne dovrnití frekvenční charakteristiky a obvod je tedy ne-stabilní. Zvítězíme-li dale dopravní zpoždění T_a , může se frekvenční charakteristika $F(j\omega)$ tak deformovat, že bod $(-1; j0)$ zůstane vně této charakteristiky a obvod se stane opět stabilní. Další zvětšování T_a opět může způsobit nestabilitu obvodu. Ty hodnoty T_a , při kterých bude frekvenční charakteristika $F(j\omega)$ procházet bodem $(-1; j0)$, budeme nazývat kritické hodnoty $T_{a,k}$ a úhlový kmitotet ω_k , při kterých prochází frekvenční charakteristika bodem $(-1; j0)$, určené z rovnice

$$F(j\omega_0) = F_1(j\omega_0) e^{-j\omega_0 T_{a,k}} = -1 \quad (349)$$

které jsou ekvivalentní rovnicím

$$|F(j\omega_0)| = |F_1(j\omega_0)| = 1 \quad (350)$$

$$\arg F(j\omega_0) = \arg F_1(j\omega_0) - \omega_0 T_{a,k} = -(2k + 1)\pi, k = 0, 1, 2, \dots \quad (351)$$



Obr. III. Frekvenční charakteristika obvodu s dopravním zpožděním

Obr. III.1. Frekvenční charakteristika obvodu s dopravním zpožděním

$$F(p) = F_1(p) F_2(p) = F_1(p) e^{-pT_a} \quad (345)$$

Obr. III.2. Regulační obvod s dopravním zpožděním

Nebude-li obvod obsahovat člen s dopravním zpožděním, bude jeho přenos

$$F_0(p) = \lim_{T_a \rightarrow 0} F(p) = F_1(p) \quad (346)$$

Obr. III.3. Regulační obvod s dopravním zpožděním

$$F(j\omega) = F_1(j\omega) e^{-j\omega T_a} \quad (347)$$

Obr. III.4. Regulační obvod s dopravním zpožděním

$$F_0(j\omega) = \lim_{T_a \rightarrow 0} F_1(j\omega) e^{-j\omega T_a} = F_1(j\omega) \quad (351)$$

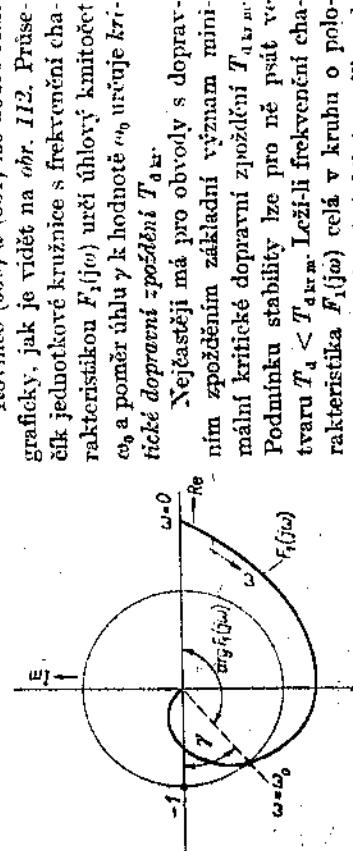
Z rovnice (35) vyplývá, že kritickou hodnotu dopravního zpoždění lze určit z podmínky

$$\frac{T_{d,k}}{\omega_0} = \frac{\pi(2k+1) + \arg F_1(j\omega_0)}{\omega_0} = \frac{2k\pi + \pi + \arg F_1(j\omega_0)}{\omega_0} = \\ = -\frac{2k\pi}{\omega_0} + \frac{\gamma}{\omega_0} \quad (35)$$

kde γ je úhel mezi vektorem $F_1(j\omega_0)$ a zápornou reálnou poloosou.

Rovnice (35) a (35) lze dobře řešit graficky, jak je vidět na obr. 112. Průsek jednotkové kružnice s frekvencí charakteristikou $F_1(j\omega_0)$ určí úhlový kmítocet ω_0 a poměr úhlu γ k hodnotě ω_0 určuje kritické dopravní zpoždění $T_{d,k}$. Nejčastěji má pro obvody s dopravním zpožděním základní význam minimální kritické dopravní zpoždění $T_{d,k,m}$. Podmíinku stability lze pro ně psát vztahem $T_d < T_{d,k,m}$. Leží-li frekvenci charakteristiky $F_1(j\omega)$ celá v kruhu o poloměru jedna, je obvod stabilní pro libovolné dopravní zpoždění T_d .

Obr. 112. Určení kritického dopravního zpoždění $T_{d,k}$



prací. Její aplikaci především na neelineární dynamické systémy se zabývá např. [8.3]. Také práce V. N. Popova [8.10], týkající se problému tzv. absolutní stability jsou významným přínosem pro řešení stability.

Potřebujeme-li určit oblasti změny parametrů a vliv těchto změn na stabilitu obvodu, můžeme použít kritéria, odvozenáho Nějmarkem (oblasti D). Isteře určitým způsobem zvolenou výsechnu všechna výše uvedená kritéria. Lze je různé výhodon použít pouze při změně jednoho parametru, při změně dvou parametrů se stavá již méně přehledný a pro změny více parametrů je prakticky neužitelné.

KONTROLNÍ OTÁZKY

1. Formuluje základní podmínky stability lineárních regulačních obvodů!
 2. Povímejte kritéria algebraická a frekvenční z hlediska jejich použití pro určení stability regulačních obvodů!
 3. Povídejte Hurwitzovo kritérium a Routhova-Schurova algoritmu k určení stability uzavřeného obvodu, jehož přenos je v otevřeném stavu
- $$F(p) = \frac{K}{(p^2T_1T_2 + pT_1 + 1)(pT_2 + 1)}$$
- Určete kritické zesílení!
4. Stanovte kritické zesílení téhož obvodu kritériem Michajlovič-Leonhar-
 - dovým!
 5. Co je to bezpečnost ve stabilitě?
 6. Jak určíte bezpečnost v modulu a ve fází pomocí logaritmických frekven-
 - nich charakteristik?
 7. Stanovte vliv jednoho z parametrů lineárního regulačního obvodu na jeho stabilitu pomocí Nějmarkova kritéria!
 8. Jak určíte kritickou hodnotu dopravního zpoždění s ohledem na stabilitu obvodu?

LITERATURA K 8. KAPITOLE

- [8.1] Hurwitz, A.: Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. — Mathem. Ann. 46, 1895, s. 273—284.
[8.2] Krasovskij, A. A., Postupor, G. S.: Osnovy automatiki i techniky kibernetiky. — Moskva 1962, 600 s.
- [8.3] Kotek, Z., Kubík, S., Razim, M.: Nejlineární dynamické systémy. SNTL, Praha 1973.
- [8.4] Leonhard, A.: Ein neues Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung — Arch. El.
- 38, 1944, s. 17—28.

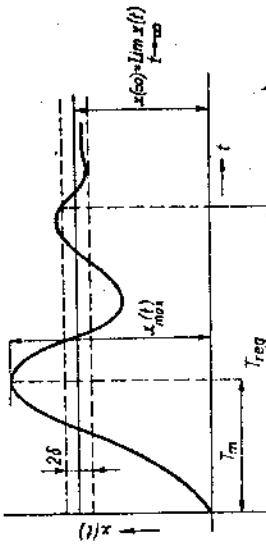
- [8.5] Lipšicjan, A. M.: Obsnja zaličca ob ustojivosti dvizjenja. Moskva 1892, 1935, 1950.
- [8.6] Michajlo, A. V.: Metod garmočeskogo analiza v teoriji regulovanija — Avtomatika i telemekhanika 3, 1938.
- [8.7] Nečeljov, J.: Jednoduchý důkaz Schurova kritéria stability regulace — Elektrotechnický obzor 45, 1956, č. 1, s. 17—21.
- [8.8] Njermek, Ju. N.: D — razbijenija prostranstva kvazipolinomna — Prikladnaja Matematika i Mechanika 13, 1949, s. 349—379.
- [8.9] Nyquist, H.: Regeneration Theory — Bell Syst. Tech. J. 1932, s. 126.
- [8.10] Popov, V. M.: Rešenije novoj zadaci ustojivosti regulirujemych sistem. — Avtomatika i telemekhanika 1963, č. 1.
- [8.11] Routh, E. J.: Dynamics of a System of Rigid Bodies. Londýn, Mc Millan and Co. 1877.

9. KVALITA REGULAČNÍHO POCHODU

Podmínka stability regulačních obvodů je podmínkou nutnou, nikoli věžk poštařující pro jejich správnou funkci. Podstatné je chování obvodu v přechodném stavu při působení poruch, které mohou mít nejrůznější charakter. Vrátíme z nich lze nahradit součtem jednotkových funkcí, nazývanem posunutých nebo součtem harmonických složek různých kmitotří. Náhrada časového průběhu poruchy součtem jednotkových funkcí vychází z konvolučního integrálu, náhrada harmonickými složkami z integrálu Fourierova nebo Fourierovy řady. Vzhledem k platnosti principu superpozice u lineárních obvodů lze tímto způsobem určit přechodný proces při libovolné poruše a je tedy vhodné analyzovat chování regulačních obvodů při porušení tvaru jednotkového skoku, jednotkového impulušu nebo harmonické funkce. Obyčejně vyšetřujeme chování regulačního obvodu při poruše tvaru jednotkového skoku, neboť je to jeden z nejvíce častých případů, který musí obvod zvládat. Vyhoví-li průběh regulačního pochodu, který charakterizujeme dále uvedenými ukazateli, při skokové poruše, lze předpokládat, že výhoví i při poruchách, které nemění skokem svoji hodnotu.

Kvalitu regulačního pochodu charakterizujeme následujícími ukazateli (obr. 113):

1. Dobou regulace T_{reg} (dobou regulačního pochodu), definovanou podmínkou, že pro $t > T_{reg}$ platí $|x(t) - x(\infty)| \leq \delta$



Obr. 113. Základní parametry regulačního pochodu

Vrátíme z nich lze nahradit součtem jednotkových funkcí, nazývanem posunutých nebo součtem harmonických složek různých kmitotří. Náhrada časového průběhu poruchy součtem jednotkových funkcí vychází z konvolučního integrálu, náhrada harmonickými složkami z integrálu Fourierova nebo Fourierovy řady. Vzhledem k platnosti principu superpozice u lineárních obvodů lze tímto způsobem určit přechodný proces při libovolné poruše a je tedy vhodné analyzovat chování regulačních obvodů při porušení tvaru jednotkového skoku, jednotkového impulušu nebo harmonické funkce. Obyčejně vyšetřujeme chování regulačního obvodu při poruše tvaru jednotkového skoku, neboť je to jeden z nejvíce častých případů, který musí obvod zvládat. Vyhoví-li průběh regulačního pochodu, který charakterizujeme dále uvedenými ukazateli, při skokové poruše, lze předpokládat, že výhoví i při poruchách, které nemění skokem svoji hodnotu.

Kvalitu regulačního pochodu charakterizujeme následujícími ukazateli (obr. 113):

1. Dobou regulace T_{reg} (dobou regulačního pochodu), definovanou podmínkou, že pro $t > T_{reg}$ platí $|x(t) - x(\infty)| \leq \delta$

kde δ je zadána přesnost regulacního obvodu (viz 6. kap.). Teoreticky probíhá přechodný proces v lineárních regulacích obvodech neomezenou dobou.

Prakticky končí v okamžiku, kdy odchylka regulované veličiny od její konečné hodnoty nepřerývající danou hodnotu.

2. Maximální odchylka regulované veličiny (maximální přeregulování), definovanou výrazem

$$\sigma_{\max} = \frac{x_{\max}(t) - x(x)}{x(x)} \cdot 100 \text{ \%} \quad (353)$$

3. Dobou, při které dochází k maximálnímu přeregulování T_{\max} , danou vztahem

$$x(T_{\max}) = x_{\max}(t)$$

4. Počtem přeregulování v intervalu $t < 0, T_{\text{reg}} >$, který je roven počtu maxim $x(t)$, jejich hodnota je vysší, než je

$$[x(\infty) + \delta]$$

Přechodné procesy lze rozdělit na tři základní typy (obr. 114).

1. Kmitavý proces s přeregulováním, kdy

$$x(t) > [x(\infty) + \delta]$$

$t < T_{\text{reg}}$ (křivka 1);

2. kmitavý proces bez přeregulování (křivka 2);

3. monotonní proces, kdy

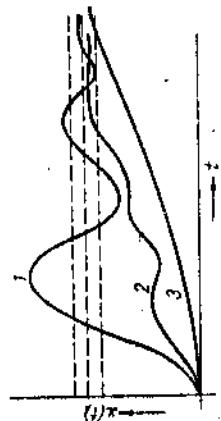
$$\frac{dx}{dt} \geq 0 \text{ a } x(t) \leq x(\infty) \quad (\text{křivka 3}).$$

pro některé hodnoty

$t < T_{\text{reg}}$ (křivka 1);

2. kmitavý proces bez přeregulování (křivka 2);

3. monotonní proces, kdy



Obr. 114. Základní typy přechodových procesů

integrální kritéria kvality a frekvenci kritéria kvality. Základní myšlenkou všech těchto metod je získat obraz o chování regulačního obvodu v přechodném stavu, aniž bychom znali explicitní řešení příslušné diferenciální rovnice. Nazýváme je proto (podobně jako o zjistování stabilit) metodami nejprimitivní. V obvodech se statistickým signály ztrácí dříve uvedené očekávané kvality regulačního obvodu smysl, jak si ukážeme v kapitole o statistické dynamice regulačních obvodů a jako ukazatele kvality se používá např. střední kvadratické odchyly.

9.1. KRITERIUM APERIODICKÉHO PRŮBĚHU REGULAČNÍHO POCHODU

Při hodnocení kvality regulačního pochodu je velmi často potřeba zjistit, zda regulační pochod je *aperiodický* nebo *kmitavý*. V podstatě jde o určení, zda všechny kořeny charakteristické rovnice jsou reálné záporné nebo komplexní se zápornou reálnou částí. Existuje několik kritérií aperiodicity (někdy se uvádí také pojmenování *aperiodické stability*), která umožňují podle koeficientů charakteristické rovnice určit, jestli regulační pochod aperiodický. V. M. Mejerov a J. Filip odvodili kriterium aperiodicity, které vychází ze Sturmovy téry o kořenech algebraických rovnic. Toto kriterium uvedeme bez důkazu.

Má-li charakteristická rovnice stabilního uzavřeného regulačního obvodu ivar

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

vytvoříme posloupnost, vzdály jednotolo koeficientu charakteristické rovnice a jednoho koeficientu z její derivace podle p ; začneme koeficientem při nejvyšší mocnině p charakteristické rovnice, potom zaříme koeficient při nejvyšší mocnině derivace, tj. při p^{n-1} , potom koeficient při p^{n-2} původní charakteristické rovnice a tak postupně střídáme koeficienty. Vytvořená posloupnost má tvar

$$\{a_n; \quad n a_n; \quad a_{n-1}; \quad (n-1)a_{n-1} \dots, \quad a_1; \quad k a_1, \quad \dots, \quad a_2; \quad 2a_2; \quad a_1; \quad a_1; \quad a_0\} \quad (354)$$

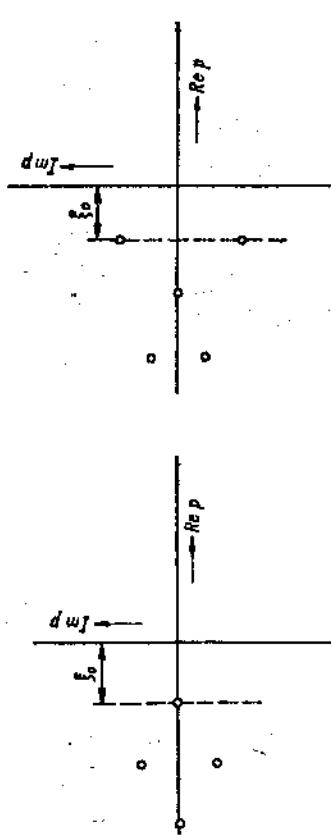
Na tento posloupnost koeficientů aplikujeme Routhův-Schurův algoritmus (viz 8. kapitola) a redukujeme ji až na tři členy posloupnosti. Ještě-li během redukce všechny koeficienty větší než nula, je pochod aperiodický, objeví-li se koeficient záporný, je pochod kmitavý a redukce se píruší. U pochodu s všechna součinná kořeny charakteristické rovnice se objeví v jednom řádku nuly.

Nejpřesnější obraz o chování obvodu lze získat explicitním řešením diferenciální rovnice, která jej popisuje, a sestrojením grafu výstupní veličiny $x(t)$. To ovšem vyžaduje určit kořeny charakteristické rovnice a integrační konstanty, což je obecně velmi obtížné, i když existuje celá řada metod, které s větší či menší přiblížností umožňují kořeny charakteristické rovnice stanovit. Jestliže parametry přechodové funkce nepřevyšují zadané hodnoty, má regulační pochod požadovanou kvalitu. Vzhledem k zmíněné již obtížnosti sestavit explicitní řešení diferenciálních rovnic existuje řada přibližných metod, jak očekává kvalitu regulačního pochodu podle rozložení kořenů přenosových funkcí obvodu (rozdělení kořenů charakteristické rovnice).

9.2. VLIV ROZLOŽENÍ KOŘENŮ CHARAKTERISTICKÉ ROVNICE NA KVALITU REGULAČNÍHO POCHODU. STUPĚN STABILITY A KOEFICIENT TLUMENÍ

Oznaďme-li odchylku regulované veličiny od její ustálené hodnoty $x(t)$, bude při vztahu k tvaru jednotkového skoku její průběh dán řešením rovnice regulačního obvodu, tj.

$$x(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t} = \sum_{i=1}^n k_i e^{(Re p_i + j\omega_i)t} = \sum_{i=1}^n k_i e^{pt} (\cos \operatorname{Im} p_i t + j \sin \operatorname{Im} p_i t) \quad (355)$$



Obr. 115. Stupeň stability regulačního obvodu ξ_0

kde p_i jsou kořeny charakteristické rovnice regulačního obvodu, k_i integrační konstanty, dané počátečními podmínkami, n řád diferenciální rovnice.

Rozložení kořenů charakteristické rovnice v komplexní rovině kořenů rozhoduje nejen o stabilitě, ale i o chování regulačního obvodu. Čím jsou kořeny dále nalevo od imaginární osy, tím má obvod nejen větší bezpečnost ve stabilitě, ale také jeho přechodová charakteristika má průběh z hlediska doby regulační T_{reg} lepší. Časové konstanty jednotlivých složek rovnice (355) jsou dány výrazy

$$T_i = \frac{1}{|\operatorname{Re} p_i|} \quad (356)$$

Z toho plyne, že čím je větší bezpečnost ve stabilitě, tím je také obvod rychlejší. Tento způsob lze definovat tzv. stupěn stability regulačního obvodu jako vzdálenost ξ_0 nejbližšího kořenu charakteristické rovnice vlevo od imaginární osy, obr. 115.

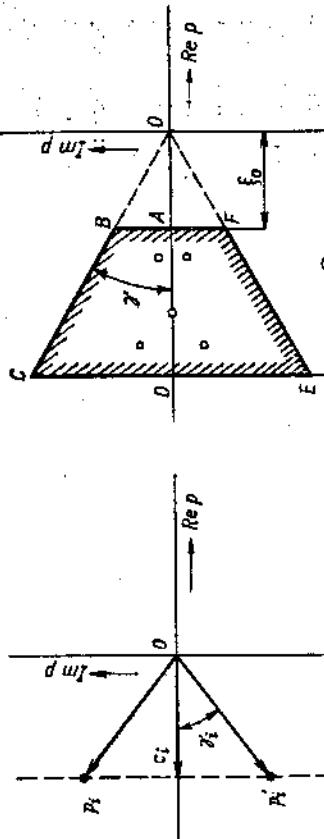
Řešení $x(t)$ lze potom psát ve tvaru

$$x(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{p_i t} = e^{-\xi_0 t} \sum_{i=1}^n k_i e^{(p_i + \xi_0)t} \quad (357)$$

kde $\operatorname{Re}(p_i + \xi_0) \leq 0$.

Rovnice (357) neznamená, že časový průběh $x(t)$ leží pod exponenciální $e^{-\xi_0 t}$, lze však (jak bylo již uvedeno) tvrdit, že čím větší je stupeň stability, tím rychleji probíhá regulační pochod (zaniká odchylka) a doba regulačního pochodu

$$T_{reg} < (3 \text{ až } 4) \frac{1}{\xi_0} \quad (358)$$



Obr. 116. Koeficient tlumení γ_i

Obr. 117. Oblast rozložení kořenů charakteristické rovnice

Pár komplexně sduřených kořenů p_i a p'_i lze také ocenit poměrným koeficientem tlumení

$$\xi_i = -\frac{p_i + p'_i}{2\sqrt{c_i p_i}} = \frac{c_i}{\sqrt{c_i^2 + \omega_i^2}} \quad (359)$$

kde $p_i = -c_i + j\omega_i$, $p'_i = -c_i - j\omega_i$.

Koeficient tlumení $\xi_i = \cos \gamma_i$, kde γ_i je úhel mezi zápornou reálnou poloosou a vektorem kořenů p_i nebo p'_i (obr. 116). Čím je větší úhel γ , tím je menší koeficient tlumení. Stupeň stability jsme označili ξ_0 , úhel $\gamma = \arccos \xi$.

Zavedeme-li ještě označení Ω pro kořeny s největší zápornou imaginární částí, můžeme potom upřesnit oblast rozložení kořenů charakteristické rovnice podle obr. 117.

Určení všech tří ukazatelů ... stupeň stabilita ξ_0 , nejmenšího tlumení ξ (největšího úhlu γ) a nejvzdálenějšího kořenu Ω od imaginární osy ze známých koeficientů charakteristické rovnice je velmi obtížné (úloha ana-

lýz daného obvodu). Zajímavé je, že v tomto případě je úloha syntézy, tj. volba parametrů obvodu (a tedy koeficientů charakteristické rovnice podle zadaných hodnot ξ_0 , ξ a Q) mnohem jednodušší. Nechť je tedy náří, dán stupeň stability ξ_0 . Posuneme imaginární osu, a tedy i polovinu souradnic vlero o hodnotu ξ_0 . Komplexní proměnná p se změní na $p_* = p - \xi_0$. V nových souřadnicích má vyšetřovaná charakteristická rovnice tvar

$$a_n(p_* - \xi_0)^n + a_{n-1}(p_* - \xi_0)^{n-1} + \dots + a_1(p_* - \xi_0) + a_0 = 0 \quad (360)$$

něžoli

$$a_n^* p_*^n + a_{n-1}^* p_*^{n-1} + \dots + a_1^* p_* + a_0^* = 0 \quad (361)$$

kde

$$a_n^* = a_n, \dots, a_0^* \text{ jsou funkčními } \xi_0 \text{ a } \alpha, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0. \quad (362)$$

Aplikujeme-li nyní na rovnici (361) ilovovo kritérium stabilita, lze stanovit, zda při daných hodnotách parametrů je dodržen zadany stupeň stability ξ_0 . Při řešení téže úlohy s cílem určit Ω přemístíme imaginární osu o Ω nalevo a změníme znaménko u p na opačné proto, aby v nových podmínkách ležely koeficienty opět v levé pololorovině.

K určení parametrů obvodu, které zabezpečují zadané hodnoty ξ_0 , ξ a Q , je vhodné použít např. metody oblasti D, známé z §. kapitoly. Jsou-li dány tyto tři hodnoty, je dán čtyřúhelník ABCDEF, zobrazený na obr. II.7.

Máme-li použít metody oblasti D, je nutno změnit nezávislou proměnnou p tak, aby se pohybovala po obvodu tohoto čtyřúhelníka. Vzhledem k symetrii postaci objejt horní část ABCD. Na úseku AB je $p = -\xi_0 + j\omega$ a měníme ω od nuly do $\omega = \frac{\xi_0}{\xi} \sqrt{1 - \xi^2}$. Na úseku BC je $p = \omega(j - \xi)$, kde ω

$$= \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \text{ a měníme } \omega \text{ od } 0 \text{ do } \omega = \frac{\Omega}{\xi} \sqrt{1 - \xi^2}. \text{ Na úseku CD je } p = -\Omega \text{ a } \omega \text{ se mění od } \omega = \frac{\Omega}{\xi} \sqrt{1 - \xi^2} \text{ do nuly. Jako výsledek zkonstruování hraniče oblasti D určíme takto všechny hodnoty drou (nebo jednoho) parametru obvodu, pro který všechny koeficienty charakteristické rovnice leží uvnitř a na obvodu čtyřúhelníku ABCDEFA.}$$

Jednotlivé členy přenosu lze využít jako vektory v komplexní rovině. Do komplexní roviny vyneseme nuly a polý funkce $F(p)$, tj. body, ve kterých funkce $F(p)$ nabývá nulových, respektive nekončičných hodnot, obr. II.8. Pro každý bod p komplexní roviny můžeme vyjádřit výraz $\left(p + \frac{1}{T_1} \right)$ jako vektor s počátkem v bodě $-\frac{1}{T_1}$ a koncem v bodě p (nuly funkce $F(p)$ jsou v obr. II.8 značeny kroužkem, polý křížkem).

Absolutní hodnota výrazu je dána délkou vektoru a argument je dáni

keréhokoli parametrem má vliv na rozložení kořenů v komplexní rovině. Evansova metoda geometrického místa kořenů [9.1] dává dosti jasný nábor na závislost chování obvodu na změně určitého parametru. Metodou se stanoví v komplexní rovině kořeny charakteristické rovnice uzavřeného regulačního obvodu z přenosu otevřeného obvodu. Má-li regulační obvod přenos v otevřeném stavu $F(p)$, lze charakteristickou rovnici uzavřeného obvodu psát ve tvaru

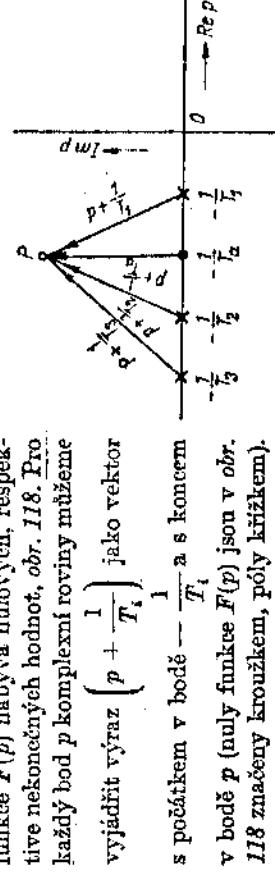
$$F(p) = -1 \quad (362)$$

Předpokládejme, že přenos $F(p)$ má tvar

$$F(p) = \frac{K(T_s p + 1)}{(T_s p + 1)(T_s p + 1)(T_s p + 1)} \quad (363)$$

a přepíšme jej do tvaru

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{K \frac{T_s}{T_1 T_2 T_3} \left(p + \frac{1}{T_s} \right)}{\left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right) \left(p + \frac{1}{T_3} \right)} = \\ &= \frac{K \left(\frac{1}{T_s} + p \right)}{\frac{1}{T_s}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{T_1} + p \right) \left(\frac{1}{T_2} + p \right) \left(\frac{1}{T_3} + p \right)}{\frac{1}{T_1}} \end{aligned} \quad (364)$$



Obr. II.8. Nuly a polý funkce $F(p)$

úlem, který vektor svírá s kladnou reálnou poloosou, a že tedy stanovit hodnotu funkce $F(p)$ pro libovolný bod p jako součin jednodivých vektorů. Absolutní hodnota funkce $F(p)$ je dílčí součinem délek vektorů, které vycházejí z nula, děleném součinem délek vektorů vycházejících z polí. Argument je dán součtem jednodivých úhlů. Úhy vektoru z polí bereme s opačným znaménkem. Výraz $\frac{T_1 T_2 \dots T_n}{T_1 T_2 \dots T_n}$, lze bud zahrnut do konstanty K , nebo uvažovat

$$\frac{1}{T_1 T_2 \dots T_n} \text{ také jako vektory a jejich délkami příslušně dělit nebo násobit podle rovnice (362). Rovnici (362) lze usít ve tvaru dvou rovnic, a to}$$

$$|F(p)| = 1 \quad (365)$$

$$\arg F(p) = (2k + 1)\pi; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (366)$$

Podstatou Evansovy metody je konstrukce geometrického místa, jehož body splňují podmínku (366), tj. algebraický součet úhlů, které svírají s kladnou reálnou poloosou vektory vedené z polí a nul do bodu p geometrického místa, je roven celistvému násobku 180° . Tvar geometrického místa závisí zřejmě jen na vzdáleném poloze polí a nul přenosu $F(p)$, zatímco poloha kořentů na geometrickém místě závisí na konstantě K (zesilenci obvodu). Evans [9.1] publikoval jednoduchá pravidla, umožňující provádět konstrukci geometrického místa, nebo určit jeho tvar. Uvedeme jen základní z nich:

1. Geometrické místo vychází z polí, které jsou kořeny rovnice

$$1 + F(p) = 1 + \frac{KM(p)}{N(p)} = 0 \quad \text{pro } K = 0$$

nebo blíží se K nule, musí se blížit tank $N(p)$ nule, aby byla splněna podmínka (362). Bod p se musí blížit polu a ten je tedy kořenem rovnice pro $K = 0$.

2. Stejným způsobem lze dokázat, že geometrické místo končí v nulách, které jsou kořeny rovnice (362) pro $K \rightarrow \infty$.

3. Z uvedeného vyplývá, že počet větví geometrického místa je roven počtu polí. Příkladem počet větví, které končí v nekonečnu, je roven rozdílu m mezi stupněm jmenovatele a stupněm čitatele přenosové funkce $F(p)$, tj. mezi počtem polí P a nul N této funkce.

4. Část geometrického místa leží vždy na reálné ose mezi poly a nulami tak, že probíhá v intervalech, kde je vpravo od bodu geometrického místa lichý počet polí a nul přenosu otevřeného obvodu.

5. Větro geometrického místa, které probíhají mimo reálnou osu, jsou vůči ní souměrné (komplexní kořeny rovnice jsou komplexně sdružené).

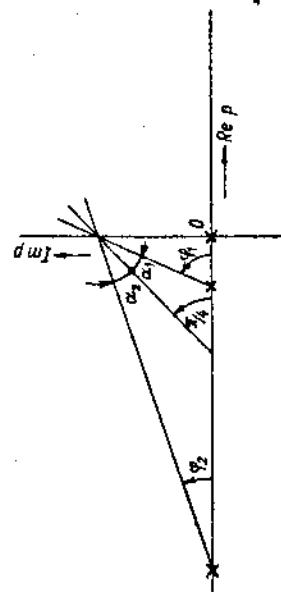
6. Geometrické místo se pro velké hodnoty p blíží asymptotám, které protínají reálnou osu pod úhly

$$\pm \frac{(1 + 2k)\pi}{m} = \pm \frac{(1 + 2k)\pi}{p - N}; \quad k = 0, 1, \dots$$

Pro velké hodnoty p se totiž velikost úhlů všech vektorů soubělí a z toho plyne ihned uvedený vztah. Souřadnice průsečíků asymptot je dána vztahem

$$x_A = \frac{\sum_{i=1}^{m+n} q_i}{P - N}$$

kde r_i jsou číselné hodnoty jednotlivých polí a q_i číselné hodnoty nul. Čtení z ponteláváme dílčaz o správnosti tohoto pravidla.



Obr. 119. Konstrukce průsečíku geometrického místa kořenů s imaginární osou $\varphi_1 = \pi/4 + \alpha_1; \varphi_2 = \pi/4 + \alpha_2$

7. Průsečky geometrického místa s imaginární osou můžeme bud stavit výpočtem, nebo graficky. Na obr. 119 je provedena konstrukce pro tři polylíku bodů z podmínky (366). Aby byla splněna podmínka (366)

$$\arg F(p) = (2k + 1)\pi$$

musí být

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

Postupujeme-li podle uvedených základních pravidel, získáme dohrou představu o průběhu geometrického místa kořenů. Po stanovení dalších několika bodů z podmínky (366) lze obvykle geometrické místo nakreslit. Pro kořeny prvního až čtvrtého řádu byly Evansem zakresleny typy geometrických míst pro různá seskupení polí a nul. Pro výšší řády je rozmanitost příliš velká a typizace není účinná.

Geometrické místo lze sestrojit také pomocí frekvencií charakteristik v logarithmických souřadnicích [9.5]. Frekvencií charakteristik jsou obrazem

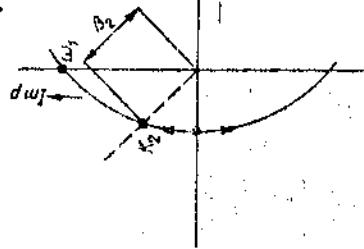
imaginární osy $p = j\omega$ v rovině amplitudových a fázových charakteristik. Mění-li se zesílení otevřeného obvodu K , tj. pohybujeme-li se amplitudová frekvenční charakteristika v soulogaritmických souřadnicích $20 \log |F(j\omega)|$ podél ω nahoru nebo dolů, lze určit takové zesílení K , pro které platí současné vztahy

$$20 \log |F(j\omega)| = 0; \quad \varphi(\omega) = -180^\circ \quad (367)$$

které jsou ekvivalentní charakteristické rovnici uzařeného obvodu (362). Proto určuje úhlory Kmitočet $\omega = \omega_1$ (pro které jsou splněny vztahy (367)).

Lze sestrojit obrázky jiných radiálních přímenek, procházejících počátkem současné v komplexní rovině p , a analogicky předstěláma určit hodnoty β_s a K_s . Sklon přímky a velikina β_s , které zcela určují bod geometrického místa kořenu, se určí pomocí těchž fázových charakteristik. Pro ocejchování geometrického místa hodnotami zesílení K je nutno sestrojiti i amplitudové charakteristiky. Metodiku sestrojení geometrického místa lze zjednodušit použitím šablón a nomogramů. Byla se strojena též různá elektromechanická zařízení, která usnadňují konstrukci geometrického místa.

Obr. 120. Učení průsečku geometrického místa kořenu s imaginární osou



Je-li znám průběh geometrického místa kořenu, lze v řešení regulačního obvodu pokračovat různými způsoby. Je-li celkové zesílení K pevně stanovené, hledáme pro toto zesílení K příslušné kořeny. Lze také např. zvolit jeden páru komplexních kořenů s určitým tlumením, pro tento páru koeficient určit zesílení a podle tohoto zesílení určitme zbyvající kořeny. Je možno konečně zadat i různé korekční členy, které výhodně změní tvar geometrického místa. Jsou-li takto stanoveny kořeny charakteristické rovnice, lze z jejich reálných a imaginárních částí určit časové konstanty a kmitočet jednotlivých složek přechodného děje. Jednoduchými operacemi s vektory lze také určit frekvenční a přechodovou charakteristiku [9.11].

9.4. STANDARDNÍ TVARY

Pro vlastní průběh regulačního pochodu je směrodatný polynom $1 + F(p) = 0$, tj. charakteristická rovnice uzařeného regulačního obvodu. Je jím daný průběh výstupu při skokovém změně vstupu a také překývanutí.

Koefficienty charakteristické rovnice

$$1 + F(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \dots + a_1p + a_0 = \prod_{i=1}^n (p - p_i) = 0 \quad (368)$$

a její kořeny jsou vztahy

$$(-1)^{n-1}a_{n-1} = p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad (367)$$

$$(-1)^n a_n = p_1 p_2 \dots p_{n-1} + p_1 p_3 \dots p_{n-2} p_n + \dots + p_2 p_3 \dots p_n + p_3 p_4 \dots p_n, \quad (368)$$

$$(-1)^n a_0 = p_1 p_2 \dots p_n.$$

Ponížíme-li těchto vztahů, lze pro pořadované kořeny (a tím vlastní průběh regulačního pochodu) stanovit odpovídající hodnoty koefficientů charakteristické rovnice.

Pro usnadnění návrhu regulačních obvodů byly sestaveny tabulky polynomů $[1 + F(p)]$ (charakteristických rovnic), které odpovídají regulačním obvodům se známými vlastnostmi. Např. pro návrh servomechanismů sestojí Whiteley [9.12] tzv. standardní tvary, kterými jsou předepsány koeficienty charakteristické rovnice uzavřeného regulačního obvodu pro hlavní tvarý přenos. Standardní tvar zahrnuje, že nebude překročena určitá doba regulačního pochodu T_{reg} a určitá maximální hodnota přeregulování. Pro přenos tvaru

$$b_0 p^s + b_1 p + b_0 \quad (369).$$

$$F(p) = \frac{p^s + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}{b_0}$$

jsou koefficienty charakteristické rovnice pro $n = 2$ až $n = 6$ uvedeny v tabulce 23.

Tab. 23. Standardní tvary podle Whiteleyho pro přenos

n	b_0	Maximální překryvnutí $\sigma [\%]$ při jednotkovém vstupu
2	1	1,4
3	2	2
4	3,4	1
5	5,2	2,6
6	7,5	3,2

Nulová ustálidla a odchyly signálu

Tab. 24. Standardní tvary podle Whiteleyho pro přenos

$$F(p) = \frac{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}{b_0p + b_n}$$

n	Maximální překvapení σ [%] při jednotkovém vstupním signálu
2	1 2,5 1 10 %
3	1 5,1 6,3 1 10 %
4	1 7,2 16 12 1 10 %
5	1 9 29 38 18 1 10 %
6	1 11 43 83 73 25 1 10 %

P. Nasim [9.6] uvodil odlišným způsobem poněkud jiné standardní tvary. Dokázal, že platí-li pro koeficienty charakteristické rovnice vztah

$$a_i^2 = \alpha a_{i-1} a_{i+1} \quad (370)$$

je maximální přeregulování dané velikostí konstanty α . Hodnoty jsou v tabul-

ce 26 pro $\alpha < 1,75$; $2,4 >$

Jako nejvhodnější hodnotu doporučuje Nasim $\alpha = 2$. Příslušné koeficienty charakteristických rovin ještě uvedeny v citované práci [9.6]. Následující autor [9.3] postupuje při odvozování standardních tvarů tím způsobem, že jako hlavní vodítko uvažuje integrální kritérium. T. N. Sokolov [9.9] navrhl na základě rozboru charakteristických rovin a přenosových funkcí typové tvary, které lze použít pro syntézu regulačního obvodu.

9.5. INTEGRÁLNÍ KRITERIA KVALITY REGULACE

Metody integrálních kritérií kvality regulačních pochodů jsou založeny na použití některých množství integrálů, pro jejichž výpočet není potřeba řešení příslušných diferenciálních rovin.

Jsem tedy integrální kritéria integrály v mezích od 0 do ∞ nějaké funkce času $x(t)$, které určitým způsobem charakterizují průběh regulačního pochodu v obvodu. Časové funkce $x(t)$ musí být absolutně integrovatelnými funkcemi.

Jako časové funkce $x(t)$ lze použít impulsní charakteristiky $g(t)$, přechodové složky odchyly $[h(t) - h(\infty)]$, jejich derivace atd. Používají se lineární integrální kritéria,

$$\begin{aligned} I_b &= \int_0^\infty x(t) \, dt \\ I_{bm} &= \int_0^\infty |x(t)| t^n \, dt \\ I_m &= \int_0^\infty |x(t)| \, dt \end{aligned} \quad (371)$$

Tab. 25. Standardní tvary podle Whiteleyho pro přenos

n	Maximální překvapení σ [%] při jednotkovém vstupním signálu
2	
3	1 6,7 6,7 1 10 %
4	1 7,9 15 7,9 1 15 %
5	1 18 69 69 18 1 20 %
6	1 36 251 485 251 36 1 20 %

kde $x(t)$ je přechodová složka odchyly.

Dle se používají kvadratická integrální kritéria

$$I_1 = \int_0^\infty x^2(t) \, dt$$

P. Nasim [9.6] uvodil odlišným způsobem poněkud jiné standardní tvary. Dokázal, že platí-li pro koeficienty charakteristické rovnice vztah

$$F(p) = \frac{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}{b_0p + b_n}$$

je maximální přeregulování dané velikostí konstanty α . Hodnoty jsou v tabul-

ce 26 pro $\alpha < 1,75$; $2,4 >$

Jako nejvhodnější hodnotu doporučuje Nasim $\alpha = 2$. Příslušné koeficienty charakteristických rovin ještě uvedeny v citované práci [9.6]. Následující autor [9.3] postupuje při odvozování standardních tvarů tím způsobem, že jako hlavní vodítko uvažuje integrální kritérium. T. N. Sokolov [9.9] navrhl na základě rozboru charakteristických rovin a přenosových funkcí typové tvary, které lze použít pro syntézu regulačního obvodu.

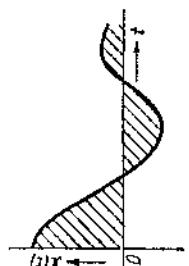
Tab. 26. Větrost přeregulování σ [%] $\alpha < 1,75$; $2,4 >$ podle Nasima

α	1,75	1,8	1,9	2,0	2,2	2,4
σ_{\max}	16 %	12 %	8 %	5 %	3 %	1 %

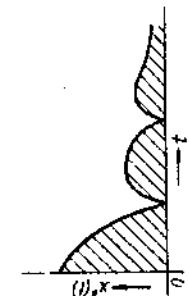
$$I_{1n} = \int_0^{\infty} [x^2(t) + r_1^2 \dot{x}^2(t)] dt, \dots \quad (372)$$

$$I_{1n} = \int_0^{\infty} [x^2(t) + r_1^2 \dot{x}^2(t) + r_2^2 \ddot{x}^2(t) + \dots + r_n^2 x^{(n)}(t)^2] dt \quad (372)$$

$$I = \int_0^{\infty} V dt$$



Obr. 121. Lineární regulační plocha



Obr. 122. Kvadratická regulační plocha

Kde V je nějaká kvadratická forma pro měnných souřadnic obvodu. Integral I_0 je plochou pod křivkou přechodného průběhu $x(t)$ (obr. 121), tzv. *kritérium lineární regulační plochy*, a integrál I_1 je plochou pod křivkou $x^2(t)$ (obr. 122), tzv. *kritérium kvadratické regulační plochy*. Oba integrály mohou sloužit jako určitá míra doby regulačního pochodu. Čím menší je I_0 nebo I_1 , tím rychleji probíhá regulační pochod. Veličina I_0 charakterizuje proces jen v případě aperiodického průběhu, neboť jinak může být proces netvámený, a přesto hodnota integrálu může být minimální (obr. 123). Výpočet kvadratické regulační plochy I_1 je kritériem mnohem objektivnějším.

Lineární integrální kritéria I_0 , I_{0m} jsou úměrná koeficientům mocninové řady p obrazu $x(t)$. Je známo, že

$$L[t^n x(t)] = \int_0^{\infty} t^n (x(t)) e^{-pt} dt = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} X(p) \quad (373)$$

Kde $X(p) = L[x(t)]$.

Pro $p = 0$ dostaneme

$$I_{0m} = \int_0^{\infty} t^m x(t) dt = (-1)^m \left[\frac{d^m}{dp^m} X(p) \right]_{p=0} \quad (374)$$

Jelikož $x(t) = h(t) - h(\infty)$ platí

$$L[x(t)] = B(p) = B_0 + B_1 p + B_2 p^2 + \dots + B_m p^m + \dots \quad (375)$$

a jsou tedy lineární integrální kritéria úměrná koeficientům odchylyck, tj.

$$B_m = (-1)^m \frac{1}{m!} I_{0m} \quad (376)$$

Nevýhodou kritéria lineární regulační plochy I_0 (jeho minimální hodnoty i při netvámeném regulačním pochodu) odstraňuje kritérium

$$I_{01} = \int_0^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Poněradž výpočet tohoto integrálu je obtížný, používá se nejčastější kritéria kvadratické regulační plochy

$$I_1 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt \quad (378)$$

jehož minimální hodnota je ukazatelem kvality regulačního pochodu. Tento integrál sice podhodnocuje menší regulační odchyly a nadhodnocuje větší, je však možno jej vypočítat přímo z obrazu regulační odchyly bez výpočtu vlastního regulačního pochodu.

Porovnáme-li výraz (378) s obrazem

$$L[x^2(t)] = \int_0^{\infty} x^2(t) e^{-pt} dt$$

zjistíme, že

$$I_1 = L[x^2(t)]|_{p=0}$$

Je známo (viz 2. kap.), že obrazem součinnu dvou časových funkcí $x_1(t)$ a $x_2(t)$ je výraz

$$L[x_1(t) \cdot x_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_1(p-\eta) \cdot X_2(\eta) d\eta \quad (379)$$

Kde $X_1(p)$ je $L[x_1(t)]$ a $X_2(p) = L[x_2(t)]$.

Je-li jeden z obrazů racionálně lomenou funkcí, tj.

$$X_1(p) = \frac{R(p)}{S(p)}$$

a má n jednoduchých polů, platí

$$L[x_1(t) \cdot x_2(t)] = \sum_{k=1}^n \frac{R(p_k)}{S(p_k)} X_2(p - p_k) \quad (380)$$

Leží-li všechny polý $X_1(p)$ a $X_2(p)$ na levém od imaginární osy, potom lze ve výrazu (379) položit $c = 0$ a $q = j\omega_R$.

$$L[x_1(t) \cdot x_2(t)] := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega) X_2(j\omega) d\omega \quad (381)$$

Pro $x_1 = x_2 = x$ položme ve výrazu (381) $p = 0$ a výraz pro kvadratickou regulační plochu zní

$$I_1 := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty X(-j\omega) X(j\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (382)$$

kde $X(j\omega)$ je Fourierovým obrazem funkce $x(t)$.

Je-li $x(t)$ impulsní charakteristika regulačního obvodu, tj. platí

$$x(t) = g(t)$$

potom

$$X(j\omega) = F(j\omega)$$

Je-li $x(t) = h(t) - h(\infty)$, je

$$X(j\omega) = \left| \frac{F(p) - pF(0)}{p} \right|_{p=j\omega}$$

Výraz (382) umožňuje vypočítat $I_1 := \int_0^\infty x^2(t) dt$ grafickou integrací kvadratického regulačního obvodu.

amplitudové charakteristiky.

J. Nekolný [9,7] podstatou tohoto způsobu je, že čítaček přenosu postupně redukuje (podobně jako u zjištování stability regulačního obvodu Routhova-Schurova algoritmu, uvedeného v kapitole o stabilitě), při čemž se přišlařné kvadratické plochy bud zmenšují o jednoduše vypočítatelné hodnoty — příma redukce čítače — nebo se výběr něměř při tzv. nepřímé redukcii čítače.

Kvadratická regulační plocha se vytiskí jednoduchými algebraickými úpravami čítače a jmenovatele. Uvedeme zde pouze výsledky této metody pro tzv. přímoú redukci čítače. Pro přenos typu

$$F(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

kde $m \leq (n-1)$, a za předpokladu, že v čítači mohou být koeficienty zá-

porné i nulové, je Nekolnýho postup pro stanovení kvadratické regulační plochy tento:

1. Aplikujeme nejprve test stability, jak byl popsán v 8. kapitole, na jmenovatele přenosu a tím je provedena jeho redukce. Není-li uvažovaný systém stabilní, nemá další význam smysl.

2. Vypíšeme řádek koeficientů čítače a každý druhý (oud zprava nebo zleva souhlasně s testem jmenovatele) podtrhneme. Jsou-li některé z koeficientů čítače nulové, výpis je jako nuly. Řádek koeficientů čítače je obsahuje vždy $(n-1)$ prvků.

3. Od nepodtržených koeficientů čítače b odečteme podtržené koeficienty jmenovatele (pri testu stability) násobené stejným číslem β tak, aby se první nepodtržený koeficient b anuloval.

4. Se zkráceným řádkem koeficientů a a b redukci opakujeme a určujeme vždy příslušné $\frac{\beta^*}{k} \left[k = \frac{a_*}{a_{n-1}} \right]$, viz 8. kapitola, až se poslední koeficient z řádku koeficientů čítače anuluje. Kvadratická regulační plocha je pak dána výrazem

$$I_1 = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\beta_i^2}{k_i}$$

Postup výpočtu je zřejmý z následujícího příkladu:

$$F(p) = \frac{1,5p^2 + 3,5p + 9}{p^3 + 3p^2 + 4p + 2}$$

Redukce čítače

1	3	4	2	$k = \frac{1}{3}$	$1,5$	$3,5$	9	$\beta = \frac{1}{2}$
-1	-2	-3			$-1,5$	-1		
3	$\frac{10}{3}$	2	$k = \frac{9}{10}$		$3,5$	8	$\beta = \frac{21}{20}$	
-3	-3				$-3,5$			
$\frac{10}{3}$	2	$k = \frac{5}{3}$			$-3,5$			

$$I_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i^2}{k_i} = \frac{2}{1} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{21}{20} \right)^2 + \frac{4^2}{3} \right] = 5,79$$

9.6. FREKVENČNÍ METODY ZJIŠŤOVÁNÍ PRŮBĚHU REGULAČNÍHO POCHODU

U lineárních systémů existuje jednoznačná závislost mezi přechodorou a frekvenční charakteristikou, popřípadě impulsní charakteristikou a frekvenční charakteristikou, jak bylo již uvedeno v 6. kapitole. Z toho vyplývá, že je velmi účelné používat k zjištování kvality regulačního pochodu (tj. k ocenění průběhu přechodové charakteristiky) frekvenčních metod. Jednoznačná závislost mezi přechodovou a frekvenčními charakteristikami vyplývá z Fourierovy integrální transformace. Vzájemný vztah originálu a obrazu v Laplaceové transformaci je dán výrazy (1) a (32), tj. platí

$$X(p) = \int_0^\infty x(t) e^{-pt} dt \quad (383)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p) e^{pt} dp \quad (384)$$

Při integraci se nezávislá proměnná p mění podél přímky, rovnoběžné s imaginární osou ve vzdálenosti c tak, aby všechny polty ležely nalevo od této přímky. Má-li funkce $X(p)$ všechny polty nalevo od imaginární osy, je možno ve výrazu (384) položit $c = 0$ a parametr $p = jo$ a Laplaceova transformace přejít v jednostrannou transformaci Fourierova

$$X(j\omega) = \int_0^\infty x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (385)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (386)$$

Yto výrazy udávají pro lineární systém vztah mezi frekvenční charakteristikou (např. $F(j\omega)$) a impulsní charakteristikou $g(t)$ za předpokladu, že tyto systémy jsou stabilní, tj. všechny polty přenosové funkce $F(p)$ leží nalevo od imaginární osy. Komplexní integrály (385) a (386) lze vyjádřit též v reálném vztahu. Toto vyjádření umožňuje mimo jiné vypočítat impulsní charakteristiku ebo přechodovou charakteristiku pomocí reálné části frekvenční charakteristiky $\text{Re}[F(j\omega)]$ nebo imaginární části frekvenční charakteristiky $\text{Im}[F(j\omega)]$ a následnou integraci (386).

Impulsní charakteristika je dána výrazem

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (387)$$

Poněvadž platí

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

$$F(j\omega) = \text{Re}[F(j\omega)] + j \text{Im}[F(j\omega)]$$

dostaneme po úpravě

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re}[F(j\omega)] \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Im}[F(j\omega)] \sin \omega t d\omega \quad (388)$$

Vzhledem k fyzikální realizovatelnosti je $g(t) = 0$ pro $t < 0$ a platí tedy

$$g(-t) = 0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re}[F(j\omega)] \cos \omega t d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Im}[F(j\omega)] \sin \omega t d\omega \quad (389)$$

Sestěním rovnic (388) a (389) dostaneme

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \text{Re}[F(j\omega)] \cos \omega t d\omega \quad (390)$$

a jejich odečtením

$$g(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \text{Im}[F(j\omega)] \sin \omega t d\omega \quad (391)$$

Vzhledem k tomu, že přechodová charakteristika je integralem odezvy na jednotkový impuls, dostaneme z rovnice (390)

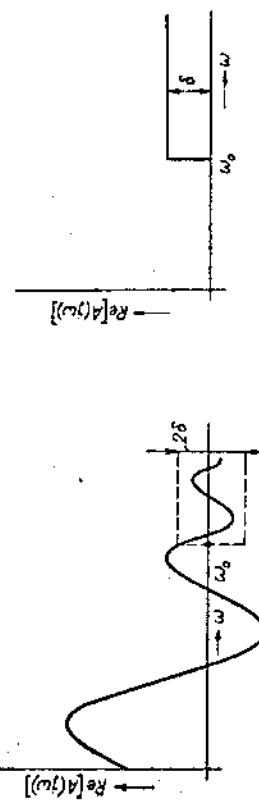
$$\begin{aligned} h(t) &:= \int_0^t g(t') dt' = \int_0^t \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\infty \text{Re}[F(j\omega)] \cos \omega t' d\omega \right) dt' = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\text{Re}[F(j\omega)]}{\omega} \sin \omega t' d\omega \end{aligned} \quad (392)$$

Z uvedeného vyplývá, že lze pro danou frekvenční charakteristiku (její reálnou část) určit jednoznačně přechodovou charakteristiku (a naopak). Této skutečnosti v dalším využijeme.

9.7. OCENĚNÍ KVALITY REGULAČNÍHO POCHEODU PODLE REÁLNE ČÁSTI FREKVENCNÍ CHARAKTERISTIKY

Frakvenční charakteristiku obvodu budeme v dalších řávách označovat obecně $A(j\omega)$, ať je otevřený nebo uzavřený regulační obvod, neboť dle uvedené závöry platí pro jakýkoli obvod, charakterizovaný přeslušným přenosem.

Z výrazu (390) a (392) vyplývá, že impulsní charakteristika i přechodová charakteristika jsou funkcií reálné části frekvencní charakteristiky regulačního obvodu v přeslušném stavu (otevřeném, uzavřeném apod.). Lze tedy (anž



Obr. 124. Průběh $\text{Re}[A(j\omega)]$
s vyznačením pásma propustnosti.

bychom konstruovali celé přechodové charakteristiky) ocenit chování regulačního obvodu podle průběhu této reálné části frekvencní charakteristiky $\text{Re}[A(j\omega)]$. Na základě rozboru lze činit následující závöry:

1. Je-li malý rozdíl v průběhu $\text{Re}[A(j\omega)]$ několika regulačních obvodů, lze se velmi malo také jejich přechodové charakteristiky.

2. Při výšetrování regulačních obvodů se stáčí omezit jen na pásmo propustnosti těchto obvodů, neboť pro $\omega > \omega_0$, kde hodnota $\text{Re}[A(j\omega)] < \delta$ (obr. 124), je chybou v časovém průběhu přechodové charakteristiky také řádu δ . Předpokládejme, že $\text{Re}[A(j\omega)] = \delta$ pro $\omega \geq \omega_0$ (obr. 125). Tak lze vyslat velikost chyb, kterou se dopuskneme, zanedbáme-li $\text{Re}[A(j\omega)]$ pro $\omega > \omega_0$. Chybá

$$\Delta h(t) = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\text{Re}[A(j\omega)]}{\omega} \sin \omega t \, d\omega = \frac{2\delta}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} \, d\omega = \\ = \frac{2\delta}{\pi} \text{Si } \omega t \Big|_{\omega_0}^{\infty} = \frac{2\delta}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si } \omega_0 t \right) \quad (393)$$

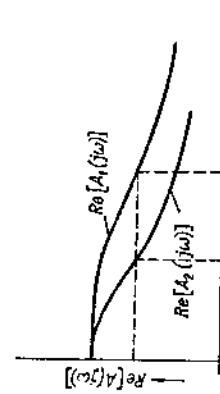
kde $\text{Si } \omega t$ je integrál sinus argumentu ωt , definovaný výrazem

$$\text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin y}{y} \, dy$$

jehož graf je na obr. 126 a hodnoty v tab. 27 na str. 201. Např. pro $t > \frac{5\pi}{\omega_0}$ je $|\Delta h(t)| < \frac{2}{\pi} \delta, 0,06 = 3,8 \cdot 10^{-3}\delta$, což znamená, že zanedbání „koncové“ části frekvencní charakteristiky pro $t > \frac{5\pi}{\omega_0}$ způsobí chybu, která je menší než $3,8 \% \delta$.

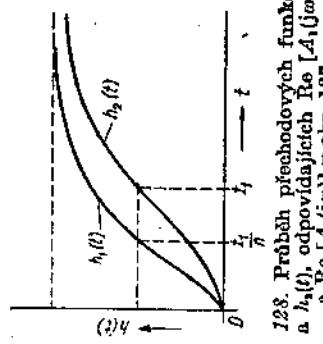
3. Konečná hodnota přechodové charakteristiky regulačního obvodu $h(\infty)$ je rovna počítací hodnotě $\text{Re}[A(j\omega)]_{\omega=0}$. Platí totiž

$$H(p) = A(p) \frac{1}{p} \\ (H(p) = \mathcal{L}[h(t)])$$



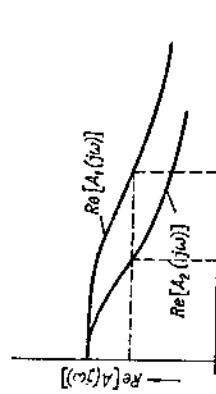
Obr. 125. Průběh $\text{Re}[A(j\omega)]$
vně pásma propustnosti.

Obr. 126. Průběh funkce $\text{Si } x$



Obr. 126. Průběh funkce $\text{Si } x$

Obr. 127. Průběh $\text{Re}[A_1(j\omega)]$
a $\text{Re}[A_2(j\omega)]$, které se liší pouze množstvem kmitočtu ω_0 .



Obr. 127. Průběh $\text{Re}[A_1(j\omega)]$
a $\text{Re}[A_2(j\omega)]$, které se liší pouze množstvem kmitočtu ω_0 .

kde $A(p)$ je přenosová funkce obvodu. Podle limitní věty o konečné hodnotě funkce platí

$$h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left[A(p) \frac{1}{p} \right] = A(0) = \text{Re}[A(j\omega)]_{\omega=0}$$

neboť $\text{Im}[A(j\omega)]$ je kohou funkcií ω a tedy $\text{Im}[A(j\omega)]_{\omega=0} = 0$.

4. Jsem-li $\text{Re}[A_1(j\omega)]$ a $\text{Re}[A_2(j\omega)]$ dvé funkce, lišící se pouze množstvem kmitočtu (obr. 127), tj. platí

$\text{Re}[A_2(j\omega)] = \text{Re}[A_1(j\omega)] ; \quad n > 1$
Vzájemný vztah odpovídajících přechodových funkcí dán výrazem (obr. 128)

Vzhledem k uvedeným požadavkům na průběh $\operatorname{Re}[A(j\omega)]$ lze psát:

$$h_2[i] = h_1\left[\frac{i}{n}\right]$$

výsledek vplývá přímo z výrazu (392), neboť

$$A_2(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}[A_2(j\omega)]}{\omega} \sin \omega t \, d\omega - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[\operatorname{Re}[A_2(j\omega)]]}{\omega} \sin \omega t \, d\omega$$

značme-li $\Omega := \text{no}$, potom

$$h_2(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Re}[A_1(j\Omega)]}{\Omega} \sin \Omega \frac{t}{n} d\Omega = h_1\left(\frac{t}{n}\right)$$

Uvedeného plyne mimo jiné také závěr, že obvod je tím rychlejší, čím je jeho pásmo průpustnosti širší, a dále to, že vysokofrekvenční část frekvenční charakteristiky charakterizuje proces pro malé hodnoty času a nízkofrekvenční ještě pro velké hodnoty času. Toho využijeme při syntéze regulačních obvodů.

$$\operatorname{Re}[A(j\omega)] > 0 \quad \text{and} \quad \frac{d \operatorname{Re}[A(j\omega)]}{d\omega} \leq 0$$

nečinní velikost přeregulování více než 18 %. Výplývá to ze vztahu

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Re}[A(j\omega)]}{\omega} \sin \omega t \, d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Re}[A(j\omega)]}{\omega} \sin \omega t \, d\omega$$

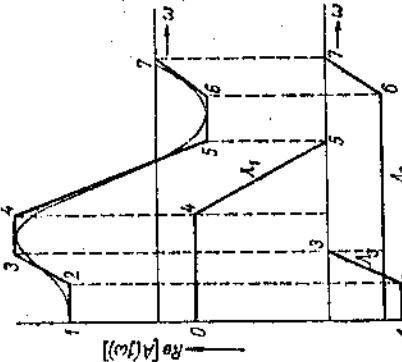
Protože výraz $\frac{\operatorname{Re} A(j\omega)}{\omega}$ je kladný a ubývá s rostoucím úhlovým činitkem ω , je řada (394) řadou alternující (znaménko příslušného člena $v < k \frac{\pi}{f}$), (k + 1) $\frac{\pi}{f} >$ je dáno znaménkem $\sin \omega t$) a klesající. Platí proto

$$h(t) \leq \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{\operatorname{Re}[A(j\omega)]}{\omega} \sin \omega t \, d\omega$$

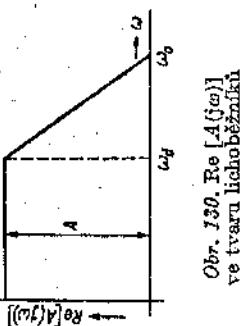
$$h(t) < \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} [\mathcal{A}(0)] \int_0^{\pi} \frac{\sin \omega t}{\omega} d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} [\mathcal{A}(0)] \operatorname{Si} \pi = 1.18 \operatorname{Re} [\mathcal{A}(0)]$$

6. Má-li Re [$A(j\omega)$] ostré extrémy, kmitá regulační obvod na kmitočtech blízkých kmitočtům tohoto extrému.

9.8. STANOVENÍ PRŮBĚHU REGULAČNÍHO POCHODU POМОCI REÁLNÉ ČАСТИ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY



Obr. 129. Náhrada Re [A(j ω)] lichoběžníký A;



Obř. 130. Re [A(jw)]
ve tvaru lichoběžníku

lomenou čárou po úsecích a integraci provádět grafickými metodami. V. V. Solodníkov [9,10] publikoval metodu přibližného výpočtu přechodových charakteristik. Základem této metody je přibližný výpočet integrálu (392). Nejprve je nutno zkonstruovat graf $\text{Re } [A(\omega)]$. Tento průběh $\text{Re } [A(\omega)]$ lze získat buď výpočtem, nebo pomocí různých nomogramů podle povahy řešené úlohy (viz např. [9,10]). Získaný průběh $\text{Re } [A(\omega)]$ approximujeme lomenou čárou tak, aby ji bylo možno používat za algebraqický sončet lichoběžníků. Ačkoli

$$\operatorname{Re} [A(jw)] = \sum_{i=1}^n A_i \quad (395)$$

Princip Solodovníkovy metody je tento: Předpokládajme nejprve, že $\operatorname{Re}[A(j\omega)]$ má tvar lichoběžníku podle obr. 130.

V tom případě je

$$\operatorname{Re}[A(j\omega)] = A \quad \text{pro } 0 < \omega < \omega_0 \quad (396)$$

$$\operatorname{Re}[A(j\omega)] = A \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 - \omega_0} = \frac{A}{1 - \kappa} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \text{ pro} \quad (397)$$

$$\omega_0 < \omega < \omega_0$$

$$\text{kde } \kappa = \frac{\omega_0}{\omega}$$

$$\operatorname{Re}[A(j\omega)] = 0 \quad \text{pro } \omega_0 < \omega < \infty \quad (398)$$

Jestliže výrazy (396), (397) a (398) dosadíme do vztahu (392), dostaneme po upravě

$$h(t) = \frac{2}{\pi} A \left\{ \operatorname{Si}(\omega_0 t) + \frac{1}{1 - \kappa} \left[\operatorname{Si}(\omega_0 t) - \operatorname{Si}(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega_0 t} (\cos \omega_0 t - \cos \omega_0 t) \right] \right\} \quad (399)$$

kde $\operatorname{Si} x$ je integrál sinus (tab. 27).

Zavedeme-li poměrný čas $\tau = \omega_0 t$ a novou funkci $h_x(\tau)$, můžeme psát

$$h_x(\tau) = \frac{2}{\pi} \left\{ \operatorname{Si}(\kappa\tau) + \frac{1}{1 - \kappa} \left[\operatorname{Si}(\kappa\tau) - \operatorname{Si}(\kappa\tau) + \frac{\cos \kappa\tau - \cos \kappa\tau}{\tau} \right] \right\} \quad (400)$$

V tom případě platí

$$h(t) = A h_x(\tau) \quad (401)$$

V. V. Solodovníkov $h_x(\tau)$ funkce tabeloval (tab. 28). Jestliže tedy použijeme náhrady reálné části frekvenční charakteristiky sumou lichoběžníku A , podle výrazu (395) a pro každý z těchto lichoběžníků najdeme z tab. 28 odpovídající přechodové charakteristiky $h_x(\tau)$ $\left(\text{při čemž } \kappa = \frac{\omega_0}{\omega_0}, \tau = \frac{\tau}{\omega_0} \right)$, lze získat výslednou přechodovou charakteristiku (u lineárních obvodů platí princip superpozice) jako součet jednotlivých přechodových charakteristik, tj. platí

$$h(t) = \sum_{i=1}^n A_i h_x(\omega_0 t) \quad (402)$$

Z výrazu (390) lze numericky stanovit přímo impulsní charakteristiku. Reálnou část frekvenční charakteristiky nahradíme opět součtem lichoběžníků

Tab. 27. Hodnoty integrál sinus $\operatorname{Si} x$ a $\frac{\sin x}{x}$

x	$\operatorname{Si} x$	$\frac{\sin x}{x}$	x	$\operatorname{Si} x$	$\frac{\sin x}{x}$
0,00	0	1	π	1,8519	0
0,01	0,010000	0,999998	3,2	1,8514	-0,01824
0,02	0,019999	0,999993	3,4	1,8419	-0,07515
0,03	0,029998	0,999885	3,6	1,8219	-0,12282
0,04	0,039996	0,999773	3,8	1,7934	-0,16101
0,05	0,04999	0,999958	4,0	1,7582	-0,18920
0,06	0,05999	0,999940	4,2	1,7184	-0,20752
0,07	0,06998	0,999988	4,4	1,6758	-0,21627
0,08	0,07997	0,999833	4,6	1,6325	-0,21601
0,09	0,08996	0,999865	4,8	1,6089	-0,21221
0,10	0,09994	0,999833	5,0	1,5900	-0,20753
0,12	0,11990	0,999760	5,0	1,5499	-0,19178
0,14	0,13985	0,999673	6	1,4247	-0,04656
0,16	0,15977	0,999573	2\pi	1,4182	0
0,18	0,17977	0,994660	7	1,4546	0,09386
0,20	0,1896	0,99334	8	1,5742	0,12366
0,25	0,2491	0,989661	9	1,6650	0,04579
0,30	0,2985	0,985066	10	1,6383	-0,05440
0,35	0,3476	0,97970	11	1,5783	-0,09090
0,40	0,3965	0,97364	12	1,5050	-0,04471
0,45	0,4450	0,966669	13	1,4394	0,03232
0,50	0,4931	0,953885	14	1,5552	0,07075
0,55	0,5408	0,95034	15	1,6182	0,04335
0,60	0,5881	0,94107	20	1,5482	0,04565
0,65	0,6349	0,93105	25	1,5315	-0,00529
0,70	0,6812	0,92031	30	1,50658	-0,03293
0,80	0,7721	0,896669	35	1,5959	-0,01223
0,85	0,8166	0,88385	40	1,5870	+0,01863
0,90	0,8605	0,87036	45	1,5537	0,01891
0,95	0,9036	0,85622	50	1,5516	-0,00525
1,00	0,9461	0,84147	65	1,5707	-0,01818
1,2	1,1080	0,776689	60	1,5867	-0,00508
1,4	1,2582	0,70389	65	1,5792	0,01272
1,5	1,3247	0,66499	70	1,5616	0,01106
π	1,3699	0,63662	75	1,5586	-0,00517
2			80	1,5723	-0,01242
2,4	1,7625	0,36749	110	1,5799	-0,00207
2,6	1,8004	0,28044	120	1,5640	-0,00484
2,8	1,8321	0,19827	130	1,5737	-0,00283
3,0	1,8487	0,04704			

Tab. 28. Tabulka $h_s(\tau)$ funkcji podlegających transformacji

Tab. 28

τ, x	0,0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	23,0	0,974	1,005	1,011	1,002	0,996	0,996	1,004	1,007	1,003	0,988
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	23,5	0,975	1,005	1,010	1,002	0,996	0,996	1,004	1,007	1,003	0,988
0,5	0,138	0,165	0,178	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231	24,0	0,975	1,005	1,010	1,001	0,996	0,996	1,004	1,007	1,002	0,997
1,0	0,310	0,305	0,340	0,356	0,371	0,386	0,401	0,417	0,432	0,447	24,5	0,975	1,005	1,009	1,000	0,996	0,996	1,004	1,005	1,003	0,997
1,5	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,594	0,603	0,617	0,646	25,0	0,976	1,005	1,008	1,000	0,995	0,995	1,004	1,005	1,003	0,996
2,0	0,572	0,597	0,628	0,655	0,683	0,709	0,761	0,786	0,810	0,848	25,5	0,975	1,005	1,008	1,003	0,995	0,995	1,004	1,005	1,003	0,996
2,5	0,674	0,705	0,737	0,797	0,823	0,867	0,833	0,839	0,891	0,943	26,0	0,975	1,005	1,007	0,999	0,995	0,995	1,004	1,002	0,997	0,996
τ, x	3,0	0,755	0,790	0,828	0,863	0,896	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095	1,095	1,095	1,095	1,095	1,095	1,095	1,095	1,095
3,5	0,783	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095	4,0	0,857	0,896	0,938	0,974	1,008	1,030	1,056	1,082	1,108	1,134
4,5	0,883	0,923	0,960	0,997	1,027	1,057	1,080	1,100	1,115	1,129	5,0	0,896	0,936	0,975	1,012	1,042	1,067	1,092	1,117	1,142	1,167
5,5	0,900	0,940	0,986	1,019	1,046	1,067	1,083	1,093	1,095	1,097	6,0	0,904	0,943	0,982	1,013	1,047	1,065	1,088	1,109	1,130	1,155
6,0	0,904	0,943	0,982	1,013	1,047	1,064	1,070	1,079	1,088	1,092	7,0	0,904	0,944	0,982	1,006	1,035	1,057	1,083	1,109	1,130	1,155
7,5	0,907	0,945	0,980	1,006	1,019	1,025	1,035	1,042	1,050	1,058	8,0	0,910	0,951	0,985	1,008	1,030	1,048	1,066	1,087	1,108	1,133
8,5	0,918	0,951	0,989	1,009	1,030	1,043	1,050	1,059	1,064	1,073	9,0	0,924	0,965	0,997	1,016	1,036	1,057	1,073	1,092	1,112	1,138
9,5	0,932	0,972	1,004	1,022	1,039	1,057	1,072	1,089	1,104	1,119	10,0	0,939	0,978	1,009	1,025	1,041	1,057	1,073	1,092	1,112	1,138
10,5	0,946	0,985	1,013	1,028	1,043	1,058	1,072	1,087	1,102	1,117	11,0	0,947	0,988	1,016	1,026	1,041	1,055	1,071	1,091	1,111	1,137
11,5	0,949	0,988	1,016	1,032	1,049	1,064	1,080	1,096	1,108	1,123	12,0	0,950	0,988	1,015	1,025	1,041	1,057	1,073	1,093	1,113	1,138
12,5	0,950	0,989	1,013	1,025	1,031	1,042	1,057	1,071	1,086	1,101	13,0	0,950	0,989	1,013	1,028	1,043	1,058	1,073	1,093	1,113	1,138
13,5	0,950	0,990	1,014	1,029	1,031	1,045	1,055	1,064	1,074	1,087	14,0	0,952	0,989	1,011	1,027	1,042	1,057	1,073	1,093	1,113	1,138
14,5	0,954	0,994	1,015	1,032	1,039	1,050	1,064	1,074	1,084	1,097	15,0	0,956	0,995	1,015	1,030	1,045	1,058	1,073	1,093	1,113	1,138
16,0	0,961	0,997	1,015	1,034	1,041	1,056	1,066	1,075	1,085	1,098	16,5	0,964	0,999	1,016	1,034	1,049	1,064	1,084	1,104	1,124	1,149
17,0	0,965	1,001	1,016	1,034	1,042	1,058	1,068	1,078	1,088	1,098	17,5	0,966	1,002	1,012	1,030	1,045	1,058	1,078	1,098	1,118	1,143
18,0	0,966	1,002	1,012	1,034	1,042	1,058	1,066	1,075	1,085	1,098	18,5	0,966	1,002	1,012	1,034	1,049	1,064	1,084	1,104	1,124	1,149
19,0	0,967	1,000	1,015	1,034	1,042	1,058	1,066	1,075	1,085	1,098	19,5	0,968	1,002	1,012	1,034	1,049	1,064	1,084	1,104	1,124	1,149
20,0	0,967	1,000	1,013	1,034	1,042	1,058	1,066	1,075	1,085	1,098	20,5	0,968	1,002	1,012	1,034	1,049	1,064	1,084	1,104	1,124	1,149
21,0	0,968	1,002	1,014	1,034	1,042	1,058	1,066	1,075	1,085	1,098	21,5	0,969	1,002	1,014	1,034	1,049	1,064	1,084	1,104	1,124	1,149
22,0	0,971	1,002	1,014	1,034	1,042	1,058	1,066	1,075	1,085	1,098	22,5	0,973	1,002	1,014	1,034	1,049	1,064	1,084	1,104	1,124	1,149

Tab. 28

(Počítačování)

ω	$A(\omega)$	$A(j\omega)$
17,0	1,012	1,007
17,5	1,009	1,005
18,0	1,008	1,002
18,5	1,006	0,999
19,0	1,001	0,995
19,5	0,998	0,992
20,0	0,996	0,991
20,5	0,995	0,991
21,0	0,996	0,993
21,5	0,996	0,995
22,0	0,996	0,996
22,5	0,997	1,000
23,0	0,998	1,001
23,5	0,999	1,002
24,0	1,000	1,002
24,5	1,000	1,003
25,0	1,000	1,004
25,5	1,000	1,002
26,0	1,000	1,002

9.9. URČENÍ FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY Z CHARAKTERISTIK PŘECHODOVÝCH

Z výrazů (390) a (392) vyplývá jednoznačný vztah mezi přechodovými charakteristikami a frekvenční charakteristikou. V dalším vysvětlíme jeden z možných způsobů [9.4] konstrukce frekvenční charakteristiky z charakteristik přechodových. Uvažujeme lineární obvod s přenosem $F(p)$, na jehož vstup přivedeme v čase $t = 0$ jednotkový vztich $x(t) = 1(t)$, obr. 132. Obraz výstupní veličiny

$$Y(p) = \frac{1}{p} F(p) \quad (406)$$

Obraz derivace výstupní veličiny

$$L[y'(t)] = p Y(p) - y(+0) \quad (407)$$

Za předpokladu, že obvod byl před přivedením jednotkového vztahu na vstup v klidu a stupeň čidatele jeho přenos je menší než stupeň inverzorů (což je v naprosté většině případů splněno), platí

$$y(+0) = 0$$

$$L[y'(t)] = F(p)$$

To známená, že

$$F(p) = \int_0^\infty y'(t) e^{-pt} dt \quad (407)$$

kde $y'(t)$ je první derivací přechodové charakteristiky (impulsní charakteristikou). V limitě platí (pro ustálěný stav)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = 0$$

Integrál (407) v tomto případě konverguje pro hodnoty parametru $p = c + j\omega$, kde $c = 0$. Dosadime-li tedy v integrálu (407) za $p = j\omega$, obdržíme výraz pro frekvenční charakteristiku obvodu

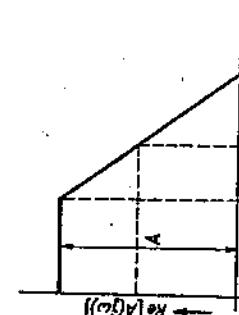
$$F(j\omega) = \int_0^\infty y'(t) e^{-j\omega t} dt \quad (408)$$

Vzhledem k tomu, že

$$y'(t) dt = dy(t) \quad (409)$$

$$F(j\omega) = \int_0^\infty e^{-j\omega t} dy(t) \quad (410)$$

K výsílení výrazu (405) s výhodou použijeme tabulkovaných hodnot funkce $\frac{\sin x}{x}$ (tab. 27).



Ob. 131. Práh k Re[A(j\omega)] pro určení impulsní charakteristiky $y_1(t)$.

$$\frac{\sin x}{x} \quad (tab. 27). \quad (405)$$

je výsledná impulsní charakteristika.

$$g_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_1 - \Delta} A \cos \omega t d\omega + \int_{\omega_1 - \Delta}^{\omega_1 + \Delta} A \frac{\omega_1 - \omega + \Delta}{2\Delta} \cos \omega t d\omega \quad (403)$$

Je-li

$$g_1(t) = \frac{2A\omega_1}{\pi} \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1 t} \frac{\sin \Delta t}{\Delta t} \quad (404)$$

je výsledná impulsní charakteristika.

$$\operatorname{Re}[A(j\omega)] = \sum_{i=1}^n A_i \quad (405)$$

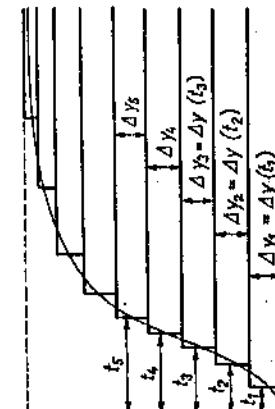
$$g(t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n A_i \omega_i \frac{\sin \omega_i t}{\omega_i t} \frac{\sin \Delta t}{\Delta t}$$

pro určení impulsní charakteristiky $y_1(t)$.

$$\frac{\sin x}{x} \quad (tab. 27). \quad (405)$$

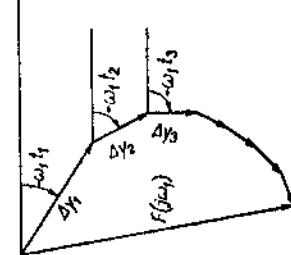
výjadřuje-li $e^{-\omega t}$ jednotkovým modolem a úhlem $(-\omega t)$, že vypočítat integrál (410) numericky. Funkce $y(t)$ vyjádříme jako součet posloupnosti přechodové charakteristiky $\Delta y(t)$, odečítaných pro zjednodušení po stejných časových intervalech t .

$$F(j\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta y(t_n) e^{-j\omega t_n} \quad (411)$$



Obr. 133. Náhrada impulsní charakteristiky pro určení frekvenční charakteristiky

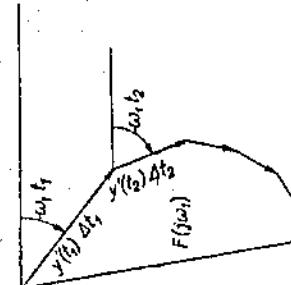
Výraz $\Delta y(t_n)$ je příručkem $y(t)$ v okamžiku t_n , pro který je příslušná hodnota úhlu rovna $(-\omega t_n)$. Frekvenční charakteristika je potom dána výrazem



Obr. 134. Grafické určení vektoru frekvenční charakteristiky pro $\omega = \omega_1$

Náhrada impulsní charakteristiky pro určení frekvenční charakteristiky

pro určení frekvenční charakteristiky



Příručky času Δt se volí takové, aby hodnoty $\Delta y(t_i)$ byly malé ve srovnání s jednotkou. Dělení je zřejmě z obr. 133.

Vektoru frekvenční charakteristiky lze stanovit z výrazu (411) z hodnot vyznačených na obr. 133 bud výpočtem, nebo graficky, jak je pro $\omega = \omega_1$ naznačeno na obr. 134.

Známé-li impulsní charakteristiku, lze podobným způsobem jako v pře-

chozím případě stanovit charakteristiku frekvenční. Je-li na vstup obvodu přiveden jednotkový impuls, je obraz impulsní přechodové charakteristiky roven obrazovému přenosu obvodu, tj.

$$L[y(t)] = F(p)$$

a za stejných předpokladů jako byly uvedeny výše (platí $\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = 0$), lze opět psát výraz (408), kde $y'(t)$ je daný průběh impulsní charakteristiky. Integrál (408) řešíme numericky a výraz pro frekvenční charakteristiku je

$$F(j\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} y'(t_n) M_n e^{-j\omega t_n} \quad (412)$$

Postup při stanovení vektoru frekvenční charakteristiky z impulsní přechodové charakteristiky je vidět z obr. 135 a 136. Jiné způsoby stanovení frekvenčních charakteristik z charakteristik přechodových lze nalézt např. v [9.14, 9.13, 9.10].

9.10. KRITÉRIUM OPTIMÁLNÍHO MODULU

H. Sartorius [9.8] odvodil velmi účelné kritérium pro volbu parametrů regulátoru. Nazývá se kritériem optimálního modulu a vychází z již uvedené skutečnosti, že maximum na křivce $\text{Re}[A(j\omega)]$ signalizuje rezonanční jev, tj. maximálnost obvodu k malo tlumeným kmitám. Totéž platí i pro závislost absolutní hodnoty (modulu) frekvenční charakteristiky uzavřeného regulačního obvodu $A(j\omega)$ na kmitočtu. Aby průběh regulačního potoku byl ryhoviný, je nutno aby

$$|A(j\omega)| = f(\omega)$$

byla funkce nerostoucí, tj. aby platilo

$$\frac{d|A(j\omega)|}{d\omega} \leq 0 \quad (413)$$

Obr. 136. Grafické určení vektoru frekvenční charakteristiky

Obr. 137. Průběh ideální amplitudové frekvenční charakteristiky (modulu)

Podobný průběh musí mít i druhá mocnina modulu, tj.

$$\frac{d|A(j\omega)|^2}{d\omega} \leq 0 \quad (414)$$

V ideálním případě by měly být výrazy $|A(j\omega)|$ a $|A(j\omega)|^2$ v širokém pásu nezávislé na kmitočtu, obr. 137, aby se přiblížil obvod ideálnímu filtru.

K odvození praktických podmínek pro optimální modul píšme výraz pro přenos $A(p)$ ve tvaru

$$A(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (415)$$

kde $m < n$.

Potom

$$A(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} = \frac{p(\omega) + j q(\omega)}{r(\omega) + j s(\omega)} \quad (416)$$

Výraz pro druhou mocninu modulu potom zní

$$\begin{aligned} |A(j\omega)|^2 &= \left| \frac{p(\omega) + j q(\omega)}{r(\omega) + j s(\omega)} \right|^2 \\ &= \frac{D_m \omega^{2m} + \dots + D_2 \omega^{22} + \dots + D_1 \omega^2 + D_0}{C_m \omega^{2m} + C_{m-1} \omega^{2(m-1)} + \dots + C_2 \omega^2 + \dots + C_1 \omega^2 + C_0} \quad (417) \end{aligned}$$

kde nové konstanty polynomu čítatele a jmenovatele výrazu (417) jsou

$$\begin{aligned} D_0 &= b_0^2 & C_0 &= a_0^2 \\ D_1 &= b_1^2 - 2b_0 b_2 & C_1 &= a_1^2 - 2a_0 a_2 \\ D_2 &= b_2^2 - 2b_1 b_3 + 2b_0 b_4 & C_2 &= a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_0 a_4 \\ D_{m-1} &= b_{m-1}^2 - 2b_{m-2} b_m & C_{m-1} &= a_{m-1}^2 - 2a_{m-2} a_m \\ D_m &= b_m^2 & C_m &= a_m^2 \end{aligned} \quad (418)$$

Přepiseme nyní funkci (417) na tvar

$$|A(j\omega)|^2 = \frac{D_m}{C_0} \frac{\omega^{2m}}{C_* \omega^{2m}} + \dots + \frac{D_2}{D_0} \omega^{22} + \dots + \frac{D_1}{D_0} \omega^2 + 1 = \frac{C_{(m-1)} \omega^{2(m-1)}}{C_0} + \dots + \frac{C_2}{C_0} \omega^{22} + \dots + \frac{C_1}{C_0} \omega^2 + 1 \quad (419)$$

Úplnou nezávislost absolutní hodnoty frekvenčního přenosu na kmitočtu bychom dostali, kdyby byl stupeň čítatele roven stupni jmenovatele a koeficienty čítatele byly stejnými násobky koeficientů jmenovatele, tj. platilo by

$$\frac{D_1}{C_1} = \frac{D_2}{C_2} = \dots = \frac{D_m}{C_m} = k \quad (420)$$

Tuto podmíinku nelze obvykle splnit, protože stupeň čítatele bývá menší než stupeň jmenovatele. Pro využívání průběhu regulárního pochodu stačí, aby

byla splněna podmínka monotónního průběhu funkce $|A(j\omega)|^2$. Z výrazu (419) je zřejmé, že monotónní průběh $|A(j\omega)|^2$ z počáteční hodnoty

$$|A(0)|^2 = \frac{D_0}{C_0} = \frac{b_0^2}{a_0^2}, \quad (421)$$

k nule při uhlíkovém kmitočtu ω (stoupajícím od 0 do ∞) může být splněn při všech kladných členech čítatele a jmenovatele výrazu (419) tehdy, jestliže

$$\frac{D_k}{D_0} \leq \frac{C_k}{C_0}, \quad (421)$$

Tuto podmíinku lze napsat také ve tvaru

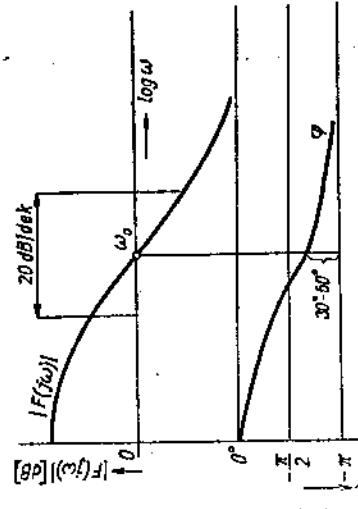
$$|A(0)|^2 = \frac{D_0}{C_0} \geq \frac{D_k}{C_k} \quad (422)$$

kde $|A(0)|^2 = |A(j\omega)|^2|_{\omega=0}$.

9.11. ZJIŠTĚNÍ KVALITY REGULAČNÍHO POCHODU POMOCÍ LOGARITMICKÝCH FREKVENČNÍCH CHARAKTERISTIK

Jeli zadána amplitudová a fázová frekvenční charakteristika otevřeného obvodu v logaritmických souřadnicích (obr. 138), lze na základě těchto charakteristik usuzovat, že kvalita regulačního pochodu bude uspokojivá, bude-li bezpečnost ve fazi činiti 30° až -60° . Z rozboru dale výplývá (viz např. 8. kap.), že logaritmická amplitudová frekvenční charakteristika musí mit při průchodu osou 0 dB sklon -20 dB/dek .

Typický průběh amplitudové a fazové charakteristiky uzavřeného regulačního obvodu v logaritmických souřadnicích je na obr. 139. U přenosu řízení lze totiž psát



Obr. 138. Amplitudová a fázová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích

$$|F_s(j\omega)| = \left| \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)} \right| \approx 1$$

pro $\omega < \omega_0$, neboť $|F(j\omega)| \gg 1$ v tomto pásmu. Pro $\omega > \omega_0$ platí, že pro $\omega > \omega_0$, neboť $|F(j\omega)| \ll 1$. To znamená, že pro $\omega < \omega_0$ amplitudová i fázová charakteristika φ logaritmických souřadnic v uzavřené charakteristiky je prakticky splývající s osou úhlových kmitočtů, pro $\omega > \omega_0$ se ztožňují charakteristiky otevřeného a uzavřeného regulačního obvodu.

Převýšení amplitudové charakteristiky v okolí úhlového kmitočtu $\omega = \omega_1$ je závislé na bezpečnosti ve fázii otevřeného obvodu (čím je bezpečnost větší, tím je převýšení menší). Fáze uzavřeného regulačního obvodu φ při zvyšování kmitočtu monotónně roste od $\varphi = 0^\circ$ až v okolí maxima amplitudové charakteristiky $|F_s(j\omega)|$ je rovna -90° .

Nahradíme-li průběh přechodové charakteristiky uzavřeného regulačního obvodu $h(t)$ lomenou čárou $H^*(t)$ podle obr. 140, je náhradní průběh impulsní charakteristiky téhož obvodu

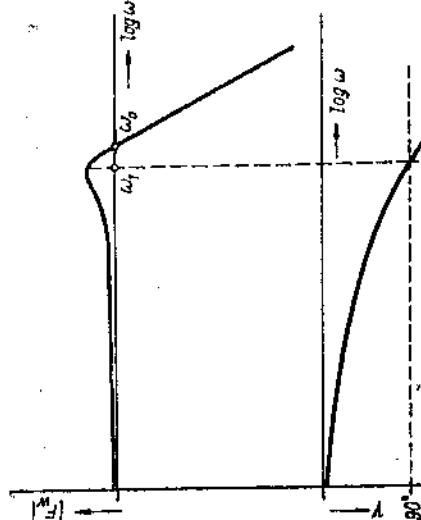
$$g^*(t) = \frac{dH^*(t)}{dt}$$

na obr. 140.

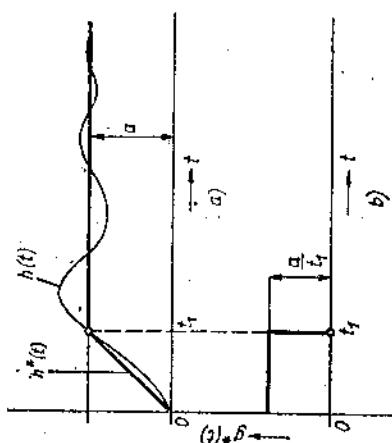
Z výrazu (385) vyplývá, že:

$$F_s(j\omega) = \int_0^\infty g^*(t) e^{-j\omega t} dt$$

Po úpravě lze dále psát pro námi uvažovaný případ



Obr. 139. Typický průběh amplitudové a fázové charakteristiky uzavřeného regulačního obvodu



Obr. 140. Přechodová a impulsní charakteristika uzavřeného regulačního obvodu, nahrazená lomenými čarami

$$\operatorname{Re} F_v(j\omega) = [F_v(j\omega)] \cos \psi = \int_0^\infty \frac{\pi}{t_1} \cos \omega t dt = \frac{\pi}{t_1} \sin \omega t_1 \quad (423)$$

Z typického průběhu charakteristik uzavřeného regulačního obvodu [139] lze dále psát pro $\omega = \omega_1$

$$\frac{\pi}{t_1} \sin \omega_1 t_1 = \operatorname{Re} F_v(j\omega_1) = [F_v(j\omega_1)] \cos(-90^\circ) = 0 \quad (424)$$

Tato rovnice je splněna pro $\omega_1 t_1 = \pi$, a lze tedy stanovit interval, ve kterém bude probíhat regulační pochod

$$\frac{\pi}{\omega_1} < T_{\text{reg}} < \frac{4\pi}{\omega_1}$$

při čemž v prvném přiblžení lze za ω_1 považovat úhlový kmitočet, při kterém amplitudová frekvenční charakteristika otevřeného obvodu prochází 0 dB (přiblžnost je respektována nerovností).

KONTROLNÍ OTÁZKY

1. Kterými základními ukazateli charakterizujeme kvalitu regulačního pochodu?
2. Jaké je kritérium aperiodického průběhu regulačního pochodu?
3. Uvedte princip metody geometrického mísítka koeficínt!
4. Co jsou to standardní tvary a jak souvisejí s kvalitou regulačního pochodu?
5. Jaká jsou integrální kritéria kvality regulace? Co je to kritérium lineární a kladatické regulační plochy?
6. Provedte jejich porovnání!
7. Jak se postupuje při stanovení přechodové a impulsní charakteristiky z charakteristiky frekvenční a naopak?
8. Uvedte princip kritéria optimálního modulu!

LITERATURA K §. KAPITOLE

- [9.1] Evans, W. R.: Control System Dynamics. New York, McGraw-Hill 1954
[9.2] Gardner, M. R., Barnes, J. L.: Transients in Linear Systems. New York, Wiley 1949

- [9.3] Graham, D., Lettrop, R. G.: The synthesis of „optimum“ transient response criteria and standard forms. — Trans. IEEE 73, 1953, pt. II, Applic. a Indust., s. 273—298

- [9.4] *Chestnut, H., Mayer, R. W.*: Servomechanisms and Regulating Systems Design.
New York, Wiley, 1955
- [9.5] *Krasovskij, A. A., Protop'jor, G. S.*: Osnovy avtomatiki i tehnicheskoi kibernetiki.
Moskva, 1962, 600 s.
- [9.6] *Nashin, P.*: The Dynamics of Linear and Non-Linear Systems. London, Blackie
and Son Ltd, 1965, 586 s.
- [9.7] *Nekol'skij, J.*: Soutasná kontrola stability a jinkosti regulace. — In: Souhrnný práce
o automatizaci. Praha, ČSAV 1961, s. 35—58
- [9.8] *Sartorius, H.*: Angepasste Regelsysteme. — Regelungstechnik 2, 1954, s. 1965
- [9.9] *Sokolen, I.*: Elektromechanické systémy automatizovaného regulování.
Moskva 1952
- [9.10] *Solodovníkov, V. V., Topkejev, Ju. J., Krutikov, G. V.*: Častotnyj metod postro-
jenija přechodnych processov. Moskva 1955, s. 195
- [9.11] *Weiss, J.*: Řešení regulačních obvodů metodou geometrického mísťa koeficíntů. —
Sliboprodíj obozr. 18, 1957, č. 11, s. 806—811
- [9.12] *Whiteley, A. L.*: Theory of servosystems with particular references to stabilisa-
tions. — I. Inst. Elect. Eng. 93, 1946, pt. II, s. 353—372.
- [9.13] *Nixon, F. E.*: Principles of servomechanism. Praha: SNTL 1965
- [9.14] *Tyrka, Z.*: Servomechanisms. Praha: SNTL 1963 (skripta)

Schvánilo ministerstvo školství České socialistické republiky
dne 5. prosince 1978 č.j. 33740/78-30
jako vysokoškolskou příručku pro elektrotechnické fakulty

Doc. Ing. PETR VAVŘÍN, CSc.,

Ing. FRANTIŠEK ZELINA

Automatické řízení počítacem

DRUHÉ, UPRAVENÉ VYDÁNÍ

PRAHA 1982

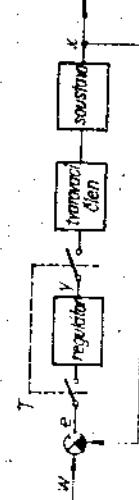
SNTL — NAKLADATELSTVÍ
TECHNICKÉ LITERATURY

ALFA, VYDAVATELSTVO
TECHNICKÉ A EKONOMICKEJ LITERATÚRY

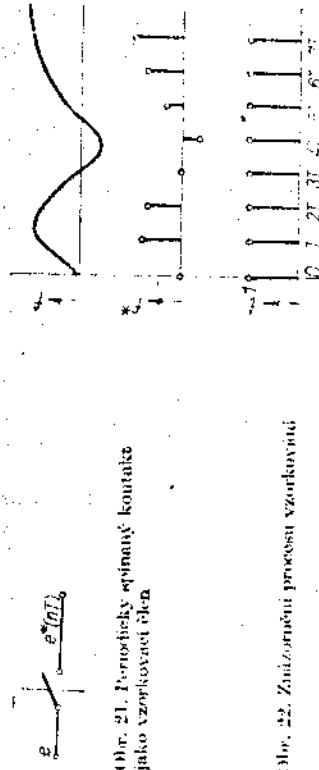
III. TEORIE REGULAČNÍCH OBVODŮ SE VZORKOVÁNÍM

12. ROZBOR VZORKOVACÍHO ČLENU

Na obr. 6 je uveden regulátor obvodu s číslovaným počítáčem ve funkci regulačního kontaktu. Z obrázku je patrné přístrojové uspořádání při plném řízení počítáčem. Z hlediska matematického popisu můžeme toto schéma významně upravit, jak ukazuje obr. 20. Na rozdíl od spojitéch lineárních systémů jsou zde na vstupu a výstupu číslicového regulačního zapojení vzorkovače, v obrazku znázorněno periodicky spínanými kontaktry. Regulační odchylka je snímána v okamžicích $t_n = nT$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) a po zpracování v regulačním počítáči je využíván akční zásahy y_n , ve tvaru amplitudově modulovaných impulsnů. K jakým změnám signálu při průchodu vzorkováním dochází, ukáže následující rozbor.



Obr. 20. Zjednodušení schématu regulačního obvodu s počítáčem jako regulátorem



Obr. 21. Přemostkový zjednodušený kontakt
jako vzorkovací člen



Předpokládáme, že kontakt na obr. 21 je spínán periodicky, s periodou T . Doba sepnutí t je zanedbatelná proti periodě vzorkování. Privedeme-li na vzorkovací signál $f(t)$, za vzorkováním dostaneme diskrétní funkci $f^*(t)$, pro kterou platí

$$f^*(t) = f(t) \text{ } i(t)$$

$i(t)$ funkce $i(t)$ je padající z obr. 22. Funkce $i(t)$ má hodnotu jedna v časech $t_n = nT$, kdežto mimo tyto okamžiky je její hodnota nulová. Z rovnice (1) můžeme

určit obraz diskrétní funkce $f^*(t)$ v $\mathcal{L}\mathcal{P}$ (diskrétní Laplaceové) transformaci. Nasobení dvou funkcí v časové oblasti odpovídá v transformaci jejich konvoluci

$$\mathcal{L}\mathcal{P} f^*(t) = F^*(p) = F(p) \times I(p) \quad (2)$$

kde $F(p)$ a $I(p)$ jsou Laplaceovy obrazy funkcií $f(t)$ a $i(t)$. Protože funkce $i(t)$ je triviana řadou impulsu, které svým tvarem odpovídají Diracovu impulu, lze obraz této funkce zapsat ve tvaru

$$I(p) = 1 + e^{-pt} + e^{-2pt} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-pt}} \quad (3)$$

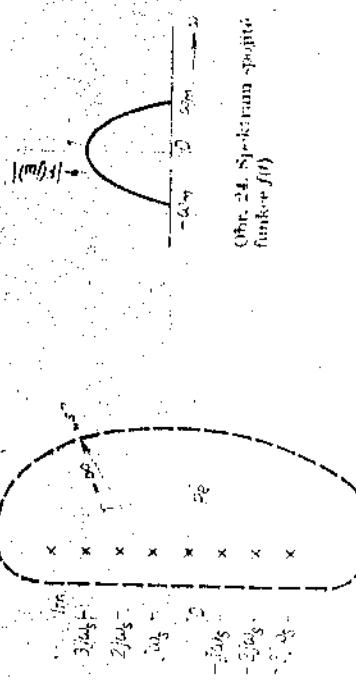
Pro obraz diskrétní funkce $f^*(t)$ pak platí

$$F^*(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) I(p-s) ds \quad (4)$$

kde c je libovolně malé kladné číslo. Předpokládejme, že roviny $s = p$ jsou spolu vřazány tak, že funkce $F(s)$ nemá žádný pól v pravé polovině roviny s . Funkce $I(p-s)$ má v pravé polovině nekonečně množství polů, pro které platí

$$s_k = p + k\omega_0; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Rozležení tétoho polu a průběh integrální cesty v rovině s ukazuje obr. 23. Inte-



Obr. 23. Rozložení polu v komplexní rovině funkce $f^*(t)$.

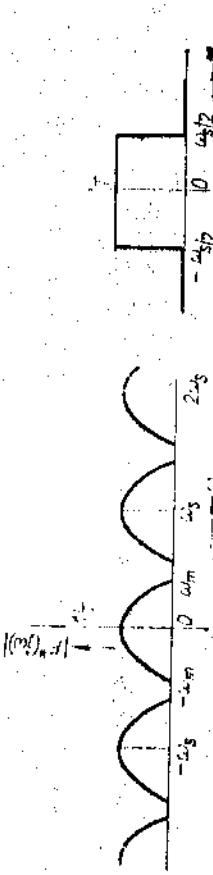
Po provedení naznačených operací dostaneme

$$F^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(p + i\omega_0 n) \quad (6)$$

Obráz funkce $f^*(t)$ v diskrétní Laplaceové transformaci je funkce periodická, s periodou $\omega_0 T$. Tato skutečnost je důležitá pro konstrukci impulsové frekvenční charakteristiky, definované vztahem

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + i\omega_0 n) \quad (7)$$

Z uvedeného vztahu mezi spojité funkcií $f(t)$ a jejím diskrétním ekvivalentem $f^*(t)$ vyplývá i požadavek na rovnou frekvenci vzorkování. Má-li spojité funkce $f(t)$



Obr. 25. Spektrum vzorkování funkce $f^*(nT)$.

amplitudově frekvenční spektrum podle obr. 24, pak spektrum odpovídající vzorkované funkci $f^*(t)$ má tvar uvedený na obr. 25. Pokud platí $\omega_0 \geq 2\omega_m$ je dostatečně základní spektrum funkce do sebe nezasahuje a základní tvar spektra zůstává zachován. Použitím vhodného filtru se spektrální propustnosti podle obr. 26 lze ze vzorkované funkce získat opět původní spojité funkci. Oslahnejší rizik spojitá funkce knižecí vysíti, než je polarina kmitočtu ω_0 , bude přirozené spektrum vzorkovacím procesem deformovaná a základním filtrem již nelze přirozeně funkci získat.

13. TVAROVACÍ ČLENY

Přesného vzorkování funkce jako vstupní veličina spojité pracujícího článku je třeba ji učinit pomocí vhodného filtru — trvanovací — upravit. Charakteristiku ideálního filtru ukazuje obr. 26. Tento filtr však není realizovatelný, v praxi lze sestrojit pouze filtry, které k approximaci původní spojité funkce používají v průběhu jedné periody vzorkování lind konstantní, nebo lineárně nebo kvadraticky proměnný signál. Podle toho rozlišujeme trvanovací členy nutného, prvního a druhého rádu.

- Tvarovací člen multitého rádu. Funkce členu je definována takto: výstupní veličina tvarovacího multitého rádu je po celou dobu periody T konstantní, rovná amplitudě vstupního impulsu, přičemž na počátku periody (obr. 27). Tento trvanovací člen vlastně přidružuje amplitudu vstupního impulsu po celou dobu periody, a z toho je odvozen jeho často používaný název „přidržovač“. Chvěním lze posoudit, jak dále se vlastnosti tohoto člena blíží požadovanému idealismu trvanovací, stanovitné jeho spektrální propustnost. K tomu je třeba nejdříve určit pre-

$$I(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad a \quad Q'(s) = \frac{dQ(s)}{ds}$$

nesovou funkci tvarovače. Přivedeme-li na jeho vstup pouze jeden jednotkový impuls v čase $t = 0$, bude na výstupu impulz jednotkové amplitudy dlouhý jednu periodu vzorkování (obr. 28). Přesovová funkce je dáná použitím Laplaceových obrazů výstupní a vstupní funkce. Obraz výstupní funkce $f_a(t)$ je

$$F_a(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-Tp}}{p} = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$

obraz výstupní funkce $f^*(t)$ je

$$F^*(p) = 1$$

Přenosová funkce tvarovače nultého rádu je dáná jejího poměremu

$$H(p) = \frac{F_a(p)}{F^*(p)} = \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$

Obr. 27. Prostup tvarovače nultého rádu nultého rádu

Pro amplitudové spektrum platí

$$|H(j\omega)| = \frac{|1 - e^{-j\omega T}|}{|\omega|} = \sqrt{\frac{1 - \cos \omega T + \sin^2 \omega T}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \omega T}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{2}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega T}{2}}$$

dostaneme

$$|H(j\omega)| = 2 \cdot \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} = T \cdot \frac{\sin \frac{\omega T}{2\omega}}{\frac{\omega}{2\pi}} = T \cdot \frac{\sin \frac{\omega T}{2\omega}}{\frac{\omega}{2\pi}}$$

Grafické znázornění této funkce je na obr. 29. Jak je zřejmá, vlastnosti tohoto tvarovače se blíží ideálnímu filtrovi pouze tehdy, jse-li nejvyšší kmitočty obsažené ve vztorkovacím signálu značně nižší než kmitočet vzorkování ω_s .

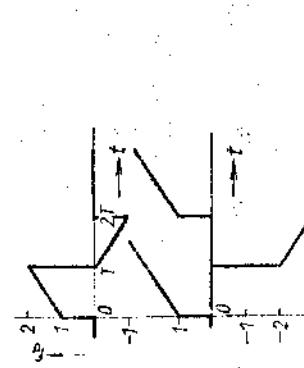
- Tvarovací člen prvního rádu. I když ve vědeckém aplikaci v praxi se používá právě popsaný tvarovací nultého rádu, v některých případech je vhodné použít tvarovací prvního rádu, který přibližně jak k amplitudě vztorku, tak k jejich

první differenci. Výstupní veličina tvarovače prvního rádu má na začátku každého periody amplitudu danou okamžitou velikostí vzorkované funkce a během periody se lineárně mění (maršála nebo klesá) v závislosti na rozdílu současné a předešlé hodnoty vztorku. Funkce $f_a(t)$ v n -té periodě pro čas

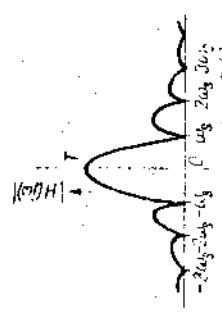
$$T_n \leq t < (n+1)T$$

nicruje vztah

$$f_a(t) = f^*(nT) + \{f^*(nT) - f^*((n-1)T)\}(t - nT) \frac{1}{T} \quad (9)$$



Obr. 28. Oděrva tvarovače prvního rádu



Obr. 29. Spektrální charakteristika tvarovače nultého rádu

Přenosovou funkci a amplitudové spektrum tohoto tvarovače odvodíme stejným postupem jako v předešlém případě. Odzvya na jednotkový impulz je znakreslena na obr. 30, kde je tříznačen jeho rozklad na elementární funkce, jejichž Laplaceovy obrazy jsou známy. Obraz výstupního signálu je

$$F_2(p) = \frac{1}{p} + \frac{2}{T_p^2} = \left(\frac{2}{p} + \frac{2}{T_p^2} \right) e^{-Tp} + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{T_p^2} \right) e^{-Tp} \quad (10)$$

Protože obraz výstupní funkce je $F^*(p) = 1$, je přenosová funkce totožná s obrazem výstupní funkce $F_a(p)$

$$H(p) = \frac{F_a(p)}{F^*(p)} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{T_p^2} \right) (1 - e^{-Tp})^2$$

Tvar amplitudového spektra tohoto filtru je na obr. 31.

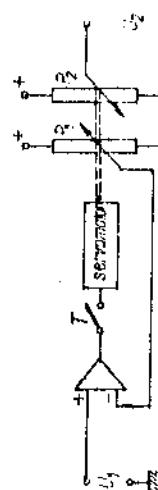


Obr. 30. Spektrální charakteristika tvarovače prvního rádu

Obr. 31. Spektrální charakteristika tvarovače prvního rádu

Realizace tvarovacího kádu

V obvodech s číslicovou regulačí je nutné převést číslicový údaj z počítače na odpovídající velikost napětí, což se děje v číslicově analogových převodnicích. Z úsporných důvodů je použit jeden převodník pro několik ohruď. V každém z nich je tvarovací člen (analogová paměť), který uchová velikost signálu vydanou pořádkem po celou dobu periody. Takorun analogovou paměť lze realizovat různými prostředky podle požadavků na dobu uchování signálu (délka periody), přenosnosti,



Obr. 33. Analogový paměť realizovaný sryvomechanismem.

odolnost proti poruchám apod. Běžně se používá operační zesilovač v zapojení podle obr. 32. Záznam probíhá při sepnutém kontaktu, kdy přenosová funkce zapojení je

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{RCp + 1}$$

Velikost časové konstanty RC uruje dobu pořádku pro dezaní přechodného deje v tomto sevráciém členu. Spinače musí být sepnut 10 dobu $h \geq 3RC$. Při rozepnutém kontaktu je vstup zjeslovaře odpojen a výstupní napětí u_2 se nemění (integrátor s odpojeným vstupem). Pakaz přenosnost a doba záznamu můžeme zvýšit jiným pořádkem, můžeme použít servokompenzaci s odpojováním motoru, neprstaři běžece potenciometru P_1 do polohy dané okamžitou hodnotou napětí u_1 . Schéma je na obr. 33. Kontakt T musí být sepnut tak dlouho, dokud servomotor nejdáno galvanické oddělení ohruď, potenciometr P_1 nelze použít. Pro čtení zaznamenané hodnoty můžeme použít bud potenciometr P_1 , nebo pokud je žádáno galvanické oddělení ohruď, potenciometr P_2 mechanicky spojený s P_1 . Vzhledem k tomuto zapojení je reálná přenosnost (fach 0,1%). Neumízená délka uchování informace a její nezávislost na případném výpadku zdroje. (Ve skádá odolnost proti vnitřním poruchám a chrum je věrná zvláště v různých provozních podnímkách. Kromě této základní principu jsou používány i další zapojení, využívající mechanických, pneumatických i chemických prvků.

14. ŘEŠENÍ DISKRETNÍCH OBVODŮ POMOCÍ TRANSFORMACE \mathcal{Z} A \mathcal{Z}_m

Spojité lineární systémy jsou popsány lineárními diferenciálními rovnicemi s konstantními koeficienty. K jejich řešení používáme Laplaceovu transformaci. Která tyto rovnice převádí na novouče algebraické. Systémy se vznikováním (diskrétní systémy) popisují diferenciální rovnice, k jejichž řešení použijeme transformaci \mathcal{Z} . Definice obrazu \mathcal{Z} diskrétní funkce $f(nT)$ je

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \quad (11)$$

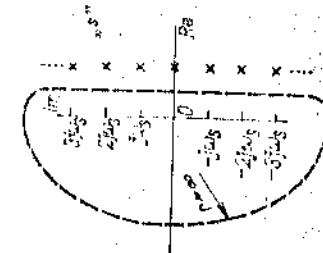
Z definice je zřejmé, že při výpočtu obrazu funkce je přihlíženo pouze k hodnotám v diskrétních okamžicích $t_n = nT$, a proto výsledkem všech výpočtů, které jsou

užitkován pomocí transformace \mathcal{Z} , jsou informace o uchování sledované funkce pouze v okamžicích vznikování.

Vznikování funkci $f^*(t)$ lze popsat též pomocí diskrétní Laplaceovy transformace. Pro obraz v této transformaci platí rovnice (4). Diskrétní funkci $f(nT)$ můžeme zapsat také v následující formě (předpokládejme, že platí $f(nT) = 0$ pro $n < 0$)

$$f(nT) = f(0) u_0(0) + f(T) u_0(2T) + f(2T) u_0(4T) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) u_0(nT)$$

kde $u_0(nT)$ je Diracův impulz, posunutý do času $t = nT$. Převedením této rovnice



Obr. 34. Položení polí v komplexní rovině do Laplaceovy transformace získáme diskrétní Laplaceovu obraz vznikování funkce $f(nT)$.

$$F^*(p) = f(0) + f(T) e^{-pT} + f(2T) e^{-2pT} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-npT} \quad (12)$$

Ze střední rovnice (11) a (12) vyplývá vzájemný vztah mezi transformací \mathcal{Z} a \mathcal{Z}_m . Doseďme-li do obrazu \mathcal{Z} za $e^{pt} = z$, získáme obraz \mathcal{Z}_m diskrétní funkce $f(nT)$. To je též jedna z možností, jak vypočítat obraz \mathcal{Z}_m vznikování funkce $f(nT)$, zmínil Laplaceovu obraz odpovídající spojité funkce $f(t)$. Podle rovnice (4) platí

$$F^*(p) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(s) I(p-s) ds \quad (13)$$

a integraci dráha je volena tak, aby zahrnovala všechny půly funkce $I(p-s)$ a žádany z půlu funkce $F(s)$ (obr. 23). Zvolíme-li naopak integraci dráhu tak, jak ukazuje obr. 34, lze do obrazu \mathcal{Z} využít uzavřené dráhy ležet všechny půly funkce $F(s)$ a žádany z půlu $I(p-s)$. Integrál na pravé straně rovnice (13) vypočítáme pomocí reziduové věty. Předpokládejme, že $F(s)$ je racionalní funkce lomena

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (14)$$

a kořeny polynomu $Q(s)$ nejsou násobné. Pak platí

$$F^*(z) = \sum_{k=1}^N \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T_p} e^{Ts_k}} \quad (14)$$

Lze si jistit kořeny polynomu $Q(s) \cdot Q'(s) = \frac{dQ}{ds}$. Z rovnice (14) vyplývá, že diskrétní Laplaceový obraz je pouze funkcií výrazu e^{sp} , neboť ostatní členy výrazu jsou konstanty. Pak něž byla pouze dosadit $z = e^{sp}$ a vypočítat obraz \mathcal{Z} funkce $f(nT)$.

Příklad

Funkce $f(nT)$ vznikla vzorkováním spojité funkce

$$f(t) = 1 - e^{-at}$$

jejíž Laplaceový obraz je

$$\mathcal{F}(p) = \frac{a}{p(p+a)}$$

Z rovnice (14) plyne

$$\mathcal{F}^*(p) = \sum_{k=1}^2 \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-Tp} e^{s_k T}} = \sum_{k=1}^2 \frac{a}{s_k + a} \cdot \frac{1}{1 - e^{-Tp} e^{s_k T}}$$

Kořeny polynomu $Q(s)$ jsou $s_1 = 0$, $s_2 = -a$, tedy

$$\mathcal{F}^*(p) = \frac{1}{1 - e^{-Tp}} - \frac{1}{1 - e^{-Tp} e^{-Ta}}$$

Dosadime-li $z = e^{sp}$, získáme obraz \mathcal{Z} funkce $f(nT) = 1 - e^{-anT}$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}}$$

U jednoduchých funkcí můžeme vypočítat obraz \mathcal{Z} pravostrannou sumou (11) jako součet nekonečné řady.

Příklad

Je dáná funkce $f(t) = e^{-2t}$, které odpovídá vzorkovaná funkce $f(nT) = e^{-2nT}$. Platí tedy

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nT} \cdot z^{-n} = 1 + e^{-2T} z^{-1} + e^{-4T} z^{-2} + e^{-6T} z^{-3} + \dots$$

což je nekonečná geometrická řada s kvocientem $q = e^{-2T} z^{-1}$. Pro její součet platí

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{1 - e^{-2T} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-2T}}$$

U složitých funkcí, u kterých by vypočet pravého uvedeným způsoby byl pracný, můžeme použít rozkladu racionalní funkce lomené na parciální zlomky, neboť i v transformaci \mathcal{Z} platí, že obraz součtu dvou funkcí se rovná součtu jejich obrazů.

Příklad

Spojité funkce je dána vztahem $f(t) = \sin at$, vzorkovaná funkce $f(nT) = \sin anT$. Laplaceový obraz $\mathcal{F}(t)$ je

$$\mathcal{F}(p) = \frac{a}{p^2 + a^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{j}{p - ja} - \frac{j}{p + ja} \right)$$

V předchozím příkladě jsme vypočítali obraz funkce e^{-at}

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{Z}\{e^{-at}\} = \frac{z}{z - e^{-at}}$$

Tohoto vzorce použijeme i nyní, kdy kořeny jmenovatele obrazu $\mathcal{F}(p)$ jsou imaginární. Platí

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{Z}\{\sin at\} = \frac{1}{2} \left(\frac{je^{-iat}}{z - e^{-iat}} - \frac{je^{iat}}{z - e^{iat}} \right) = \frac{z \sin at}{z^2 - 2z \cos at + 1}$$

Zpětná transformace. Známe-li obraz diskretní funkce $F(z)$, můžeme vyplácet konkrétní hodnoty funkce $f(nT)$ několika způsoby. Zajímá-li nás pouze reálná prvních hodnot, můžeme provést naznačené dělení, a získáme tak mocninnou řadu, jejíž koeficienty odpovídají pravostrannou sumě amplitudám diskretní funkce.

Příklad

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z - 0,8}{z^2 - 1,5z + 0,5}$$

Pomočí algoritmu pro dělení dvou mnohočlenů dostaneme

$$\begin{aligned} (z - 0,8) & : (z^2 - 1,5z + 0,5) = z^{-1} + 0,7z^{-2} + 0,55z^{-3} + \dots \\ & -z + 1,5 - 0,5z^{-1} \\ & \hline -0,7 - 1,05z^{-1} & = 0,35z^{-2} \\ & -0,7 - 0,5z^{-1} \\ & \hline 0,55z^{-1} - 0,35z^{-2} \end{aligned}$$

odkud plyne $f(0) = 0$; $f(1T) = 1$; $f(2T) = 0,7$; $f(3T) = 0,55$, ... atd. Tento postup je zvlášť vhodný, jestliže k dispozici máme počítač, neboť program pro dělení mnohočlenů je velmi jednoduchý a často bývá již ve standardní knihovně programu. Při výpočtu většího počtu členů je však třeba správně využít výpočty hodnot kontrolních kritérií. Pomocí větvy o nekončené hodnotě, neboť v důsledku zaokrouhlování dochází v procesu dělení k chybám, které často výrazně ovlivní výsledek. Je tomu tak zvláště v těch případech, kdy kořeny jmenovatele numerické nestabilitě výpočtu a číselných několikanásobně převyšují vlastní hodnoty funkce.

Známe-li kořeny jmenovatele obrazu $\mathcal{F}(z)$ a zvláště jsou-li tyto polý jednoduché, můžeme použít vztahu

$$f(nT) = \sum_{k=1}^N \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) \mathcal{F}(z_k) z_k^{n-1} \quad (15)$$

který platí pro funkci \mathcal{Z} definovanou vztahem

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C_R} F(z) z^{n-1} dz = \Sigma \operatorname{Res} F(z) z^{n-1} \quad (16)$$

Příklad

aznečeným postupem vypočítáme ūlohu z minulého příkladu.
Z hlediska sledování této funkce by proto bylo výhodné mit meziost posunut okamžiky vzorkování v meziach jedné periody tak, jak je to naznačeno na obr. 36. To ovšem nemůže vzhledem k tomu, že v obvodu jsou skutečné vzorkovací, které pracují v časech nT , a podle dřívějšího předpokladu všechny vzorkovat ve schématu pracují synchroně. Na obr. 36 je nakresleno blokové schéma

$$F(z) = \frac{z - 0,8}{z^2 - 1,5z + 0,5} = \frac{z - 0,8}{(z - 1)(z - 0,5)}$$

ořený jmenovatele jsou $z_1 = 1$, $z_2 = 0,5$ a po dosazení do rovnice (15) dostaneme

$$\begin{aligned} f(nT) &= \frac{(z_1 - 0,8)}{(z_1 - 0,5)} z_1^{n-1} + \frac{(z_2 - 0,8)}{(z_2 - 1)} z_2^{n-1} = \\ &= \frac{z_1^n}{(z_1 - 0,5)} + \frac{z_2^n}{(z_2 - 1)} - \frac{0,8z_1^{n-1}}{(z_1 - 0,5)} - \frac{0,8z_2^{n-1}}{(z_2 - 1)} = \\ &= 2 - 2 \cdot 0,5^n - 1,6u_1(T)(1 - 0,5^{n-1}) \end{aligned}$$

$f_1(T)$ je jednotková funkce začínající v čase $t = T$. Z tohoto vzorce lze vypočítat odnotu funkce $f(nT)$ pro libovolné n . Tak např. pro $n = 3$ je

$$f(3T) = 2 - 2 \cdot 0,125 - 1,6(1 - 0,25) = 0,35$$

než souhlasí s výsledkem v předešlém případě. Pro $n = 15$ platí

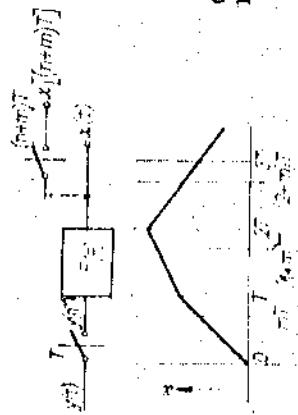
$$f(15T) = 2 - 2 \cdot 3,05 \cdot 10^{-5} - 1,6(1 - 6 \cdot 10^{-5}) = 0,400\,436\,6$$

střílená hodnota je $f(\infty) = 0,4$.

Známé-li kořeny jmenovatek, můžeme též danou funkci rozložit na parciální omky a podle tabulek najít odpovídající originály. V našem případě platí

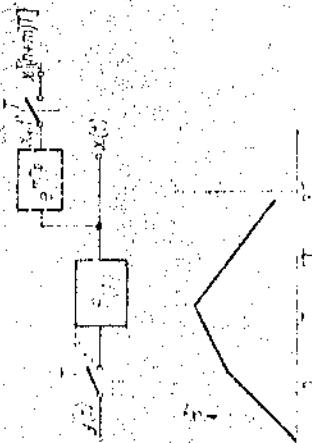
$$F(z) = \frac{0,4}{z - 1} + \frac{0,6}{z - 0,5} = z^{-1} \left(\frac{0,4}{z - 1} + \frac{0,6}{z - 0,5} \right)$$

odle tabulek a s přihlednutím k větš o posunutí v originále (popsané v dalších oddílech) vypočítáme originál ve tvaru $f_1(nT) = 0,4 + 0,6 \cdot 0,5^{n-1}$ pro $n = 1, 2, \dots$ Modifikovaná transformace \mathcal{Z}_m . Jak vylíčí z předcházejících odstavců, nelze vypočtem v prosté transformaci \mathcal{Z} stanovit hodnoty sledovaných funkcí v meziach okamžiky vzorkování, což je často žádoucí, neboť v regulárních obvodech se využívají kromě diskrétních funkcí i funkce spojité. Jsou to výstupní veličiny článek, ale článek sám má funkci



Obr. 36. Zadávání výstupu transformace \mathcal{Z} v procesu posunu okamžiků vzorkování

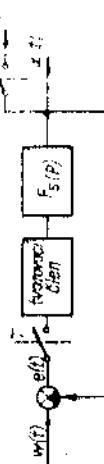
i časový průběh funkce $x(t)$ při neimplementovaném posunu okamžiků vzorkování u fiktivního vzorkovače. Jeho dílohou (nebo lépe řečenou transformací \mathcal{Z}) je v tomto případě pouze „pozorování“ nebo sledování hodnot $x[n+m]T$ pro potřeby výpočtu. Tato nově vzorkovaná funkce není v schématu nikde dle ponětí, a proto je hrostejně, zda její vzorky budeme mit k dispozici skutečné v časech $t_m = (n+m)T$.



Obr. 37. Zapojení, které plní stejnou funkci jako posun okamžiků vzorkovacích článek

Pak lze zapojení na obr. 36 nahradit zapojením podle obr. 37, ve kterém je použit neimplementovatelný článek s přenosem e^{nT} , a fiktivní vzorkovač spíná v časech $t_m = nT$. Správnost této úpravy potvrzuje pripojený časový graf funkce $x(t)$. Místo abychom posunuli okamžiky „pozorovacího“ vzorkovače proti funkci $x(t)$ o čas mT vpravo, posunuli jsme funkci o tentý čas vlevo. Vzorkované hodnoty jsou v obou případech totéž. Pomocí tohoto doplňujícího člena se záporným dopravním zpožděním můžeme získat hodnoty funkce $x(t)$ v libovolném okamžiku. Získáme tak obraz, které bude funkci proměnné z a parametru m . Definitivní vztah této nové (modifikované) \mathcal{Z}_m transformace je

$$F(z; m) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+m) T z^{-n}$$



Obr. 35. Blokové schéma regulárního obvodu pri typovém tvaru transformace \mathcal{Z}

pojitou. Při výpočtu transformace \mathcal{Z} předpokládáme, že režim vzorkovače režimem synchronizace s periodou T . Proto např. při výpočtu výstupní veličiny $x(t)$ v obr. 35 pomocí transformace \mathcal{Z} vypočítáme pouze diskrétní hodnoty $x[nT]$, což symbolizujeme fiktivním vzorkovačem na výstupu obvodu. V takovém případě transformace \mathcal{Z} již není jen matematický aparát pro popis skutečné vzorkovaných funkcí, ale prostředek pro sledování hodnot spojitéch funkcí v časech $= nT$. Zatímco hodnoty vzorkovaných funkcí jsou mimo okamžiky vzorkování

Definice diskrétního Laplaceova obrazu $F^*(p)$ je

$$F^*(p) = \frac{1}{2\pi j} \oint P(s) e^{ps} \cdot \frac{1}{1 - e^{-pT}} ds \quad (18)$$

což lze s použitím reziduové věty přepsat do tvaru

$$F^*(p) = \sum_n \text{Res } F(s) \frac{e^{nsT}}{1 - e^{-pT}} \quad (19)$$

Kde s_T jsou kořeny jmenovatele funkce $F(s)$. Dosadime-li opět $e^{pT} = z$, vypočítáme modifikovaný obraz $F(z; m)$. Je samozřejmě, že má smysl uvažovat hodnoty parametru m v mezích $0 \leq m \leq 1$. Větší hodnoty by znamenaly posunutí o více než jednu periodu, což není uřechnuto. Snadno se též přesvědčíme, že platí vztahy

$$\lim_{m \rightarrow 0} F(z; m) = F(z)$$

$$\lim_{m \rightarrow 1} F(z; m) = zF(z) - zf(0)$$

Příklad

Vypočítáme \mathcal{Z}_m obraz funkce

$$f(t) = 1 - e^{-t}$$

Laplaceov obraz této funkce je

$$F(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

Poly jmenovatele jsou jednoduché $p_1 = 0$, $p_2 = -1$ a podle rovnice (19) dostaneme

$$F(z; m) = \sum_{\substack{p_1=0 \\ p_2=-1}} \frac{e^{zpT}}{(2p+1)(1-e^{pT}z^{-1})} = \frac{z}{(z-1)} - \frac{e^{-mT}z}{(z-e^{-T})}$$

Uložme na dvě funkce $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = e^{-t}$. Obrazy těchto funkcí jsou podle rovnice (17) tyto

$$f_1(z; m) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$f_2(z; m) = e^{-mT} + e^{-(m+1)T} + \dots = \frac{e^{-mT}}{1 - e^{-T}z^{-1}}$$

Protože platí

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t)$$

je hledaný obraz

$$F(z; m) = \frac{z}{z-1} - \frac{e^{-mT}z}{z-e^{-T}}$$

což souhlasí s předchozím výsledkem.

Pro výpočet obrazu $F(z; m)$ můžeme též použít tabulek uvedených v příloze, kde jsou vypočítány obrazy nejčastěji se využívajících funkcí. Pro výpočet určitelné, tzn. hodnot vztiskované funkce v časech $t_m = (n+m)T$, můžeme použít stejných metod jako pro obrazy v prostřední transformaci \mathcal{Z} .

Příklad

Je dán obraz

$$F(z; m) = \frac{2e^{-0,5mT} \cdot z}{z - e^{-0,5T}}$$

funkce $f(t)$, jejíž hodnota ve třetí čtvrtině druhé periody je $f(1,75T) = 0,993$. Jak velká je perioda vztiskování. Pro $m = 0,75$ platí

$$F(z; 0,75) = \frac{2z e^{-0,375T}}{z - e^{-0,5T}}$$

Provědeme naznačené dělení a pro první dva členy dostaneme

$$F(z; 0,75) = 2(e^{-0,375T} + e^{-0,875T} \cdot z^{-1} + \dots)$$

Z rovnice $2e^{-0,375T} = 0,993$ plyne $T = 0,8$.

Několik dílužitých vět pro počítání v transformaci \mathcal{Z} a \mathcal{Z}_m :

Věta o linearity

Tato věta zahrnuje dvě tvrzení:
a) násobení konstantou v originále odpovídá násobení touto konstantou v obrazu,

b) součet obrazů rovná se obrazu součtu.

Již-li tedy dán souhrn funkcí

$$f(t) = A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) + \dots + A_k f_k(t)$$

pro které platí

$$\mathcal{Z}_m[f_i(t)] = F_i(z; m)$$

pak též platí

$$F(z; m) = A_1 F_1(z; m) + A_2 F_2(z; m) + \dots + A_k F_k(z; m) \quad (20)$$

Věta o posunutí v originále

Nechť funkce $f(nT)$ má obraz $F(z)$. Obraz funkce posunuté o celistrvý násobek periody $f((n+k)T)$ je

$$F_1(z) = \mathcal{Z}\{f((n+k)T)\} = z^k \{F(z) - \sum_{i=0}^{k-1} f(iT) z^{-i}\}$$

Podobně pro funkci $f((n-k)T)$ platí

$$F_2(z) = \mathcal{Z}\{f((n-k)T)\} = z^{-k} \{F(z) + \sum_{i=1}^k f(-iT) z^i\}$$

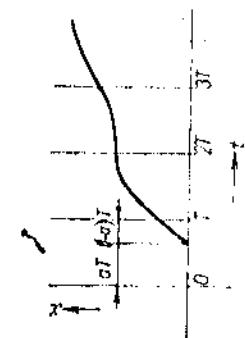
Protože u většiny funkcí, které přichází v regulační technice v úvahu, platí

$$f(-T) = f(-2T) = \dots = f(-kT) = 0$$

Předcházející vztah se zjednoduší na tvar

$$F_2(z) = z^{-\alpha} \cdot F(z)$$

Pokud je posunutí rovno násobku periody vzorkování, je třeba použít modifikované transformace. Následující úvahy předpokládají, že čas posunutí je menší než perioda vzorkování T . Na tento případ lze vidět níže uvedený graf.



Obr. 35. Grafické znázornění výpočtu modifikované transformace Z_m .

tak, že od daného času odečteme část odpovídající celému počtu period. Transformace funkce posunuté o zlomek periody a je podle definice

$$\mathcal{Z}\{f(t + aT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n + a) T \cdot z^{-n}$$

a proto nemodifikovaný obraz této funkce je

$$F_1(z) = \mathcal{Z}\{f(t + aT)\} = \mathcal{Z}\{f(t)\}_{m=1-a} = F(z; a) \quad (21)$$

Podobně pro funkci posunutou na časové osy vpravo, jak ukazuje obr. 38, platí

$$f(t - a) = f[t - T + (1 - a)T]$$

a její obraz je dán rovnici

$$F_2(z) = z^{-1} \mathcal{Z}_m\{f(t)\}_{m=1-a} = z^{-1} [F(z; 1 - a)] \quad (22)$$

Hledáme-li v této funkci obraz v modifikované transformaci, postupujeme takto:

$$f(t + aT) \quad \text{pro} \quad 0 \leq m < 1 - a \quad \text{platí} \quad F_1(z; m) = F(z; b)$$

$$b = a + m$$

$$\text{pro} \quad 1 - a \leq m < 1 \quad \text{platí} \quad F_1(z; m) = zF(z; c)$$

$$c = m - 1 + a$$

$$\text{pro} \quad a \leq m < 1 \quad \text{platí} \quad F_1(z; m) = z^{-1} F(z; r)$$

$$r = 1 - a + m$$

$$\text{pro} \quad a \leq m < 1 \quad \text{platí} \quad F_1(z; m) = F(z; s)$$

$$s = m - a$$

Všechny uvedené vztahy platí za předpokladu $f(t) = 0$ pro $t < 0$.

Věta o obrazu diferenční

První diferenční vztahy funkce $f(nT)$ je definována vztahem

$$\Delta f(nT) = f[(n+1)T] - f(nT)$$

Pomoci vztahů (20) a (21), vypočítáme obraz první diferenční

$$\mathcal{Z}\{\Delta f(nT)\} = z[F(z) - f(0)] - F(z) = (z - 1)F(z) - z\mathcal{Z}f(0) \quad (23)$$

Podobně pro druhou diferenční, jejíž definice je

$$\Delta^2 f(nT) = \Delta f[(n+1)T] - \Delta f(nT)$$

platí

$$\mathcal{Z}\{\Delta^2 f(nT)\} = (z - 1)^2 F(z) - z(z - 1)F(z) - z\mathcal{Z}f(0) \quad (24)$$

Věta o počítání hodnotě funkce

Rovnici pro výpočet počítání hodnoty funkce $f(t)$, jejíž obraz je $F(z; m)$, odvodíme ze vztahu (23)

$$\mathcal{Z}\{\Delta f[(n-1)T]\} = z^{-1}[(z - 1)F(z) - \mathcal{Z}f(0)] = (1 - z^{-1})F(z) - f(0)$$

Protože pro $z \rightarrow \infty$ platí

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{Z}\{\Delta Y_{n-1}\} = \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta f_n z^{-n} = 0$$

je počítání hodnota funkce $f(0)$ dáná rovnicí (25)

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} (1 - z^{-1})F(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (25)$$

Tato věta je po formální stránce obdobná věti o počítání hodnoty v Laplaceové transformaci

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p)$$

neboť platí $z = e^{pt}$ a

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{p}\right] = \frac{1}{z-1}$$

Věta o konečné hodnotě funkce

Obraz funkce $f(t)$, který je reprezentem racionální funkce lomené $F(z; m)$, může me rozložit na částečné zlomky

$$F(z; m) = \frac{A_0(m)z}{z - 1} + \frac{A_1(m)}{z - a_1} + \frac{A_2(m)}{z - a_2} + \dots$$

Originalní, příslušný tomuto obrazu, je

$$f[(n+m)T] = A_0(m)T + A_1(m) \frac{a_1^n}{T} + A_2(m) \frac{a_2^n}{T} + \dots$$

Pro konečnou hodnotu funkce platí $n = \infty$, a proto, má-li funkce $f[(n+m)T]$ mit ustálenou hodnotu, různou od nekonečna, musí platit $|a_i| \leq |a_j| \leq 1, \dots$ atd.

Pro konečnou hodnotu platí rovnice

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[(n+m)T] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} F(z; m) \quad (26)$$

Tento vztah je opět analogicky známému výrazu Laplaceovy transformace

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$$

Věta o součtu vzorků

Součet vzorků funkce $f(t)$ vypočítáme ze vztahu

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} = \lim_{z \rightarrow 1} F(z) \quad (27)$$

Věta o součtu druhých mocnin vzorků

Vzorkovaná funkce $f(nT)$ má obraz $F(z)$. Součet druhých mocnin diskrétních hodnot

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} f^2(nT) \quad (28)$$

vypočítáme ze vztahu

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F^*(s) F(s) (p-s) ds$$

kde $F^*(p)$ je obraz funkce $f(t)$ v diskrétní Laplaceové transformaci. Pro funkci prvního řádu

$$F(z) = \frac{b_1 z + b_0}{a_1 z + a_0}$$

platí

$$I = \frac{c_0 a_0 - c_1 a_1}{a_0^2 - a_1^2}$$

kde

$$c_0 = \frac{b_0 b_1}{a_1}; \quad c_1 = \frac{(b_0^2 + b_1^2) a_1 - a_0 b_1 b_0}{a_1^2}$$

Pro funkci druhého řádu

$$F(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

je

$$I = \frac{(a_0 + a_2)(a_0 c_1 - a_2 c_2) + a_1 c_1(a_2 - a_0)}{(a_0 - a_2)(a_0 - a_1 + a_2)(a_0 + a_1 + a_2)}$$

kde

$$c_0 = \frac{b_0 b_2}{a_2}; \quad c_1 = \frac{b_1 b_0 + b_1 b_2 - a_0 b_0 b_2}{a_2};$$

$$c_2 = \frac{b_0^2 + b_1^2 + b_2^2}{a_2} - \frac{a_0 b_0 b_2 + a_1(b_0 b_1 + b_1 b_2) + a_2^2 b_0 b_2}{a_2^2}.$$

Věta o extrému funkce

Jestliže funkce $f(t)$ má v n -té periodě vzorkování extremum (maximum nebo minimum), platí

$$\frac{df[(n+m)T]}{dm} = 0 \quad \text{pro } 0 \leq m < 1 \quad (29)$$

Výpočet obrazu \mathcal{F} a \mathcal{Z}_m je velmi pracné operací, při které se miňame dopustit většího počtu numerických chyb (zvláště u složitějších funkcí výššího řádu). Existují sice kontrolní výpočty, kterými lze tyto chyby odhalit, pravost výpočtu se tím ovšem neznamená. Je proto velmi výhodné provést převod z Laplaceova obrazu do obrazu \mathcal{Z}_m na číslicovém počítání. Můžeme např. použít tohoto postupu:

- a) Obraz \mathcal{L} dané funkce $F(p)$ rozložíme na částečné zlomky. Pro počítání to znamená využít koeficienty jmenovatele přenosu $F(p)$ a určit jejich násobnost. Pokud je přenos dán ve tvaru součtu koeficíntových činitelů, je třeba stanovit pouze konstanty čítače jednotlivých parciálních zlomků. V obou případech jde o řešení algebraické rovnice vysokého řádu. Program pro řešení této rovniny byl ve standardním výbavě počítače.
- b) K jednotlivým zlomkům přiřadíme příslušné diféry obrazu \mathcal{Z}_m . Pokud nás obecnost koeficientu není větší než 2, je tento program velmi jednoduchý.
- c) Sčítáme jednotlivé obrazy \mathcal{Z}_m a dostaneme tak hledaný obraz $F(z; m)$.

Druhý, častěji používaný způsob, využívá pro výpočet obrazu znaloosti funkce $f(t)$, jejíž diskrétní obraz hledáme. Předpokládejme, že Laplaceově je dán ve tvaru

$$F(p) = \frac{A(p)}{\prod_{k=1}^K (p - p_k) Y_k}$$

diskrétní obraz $F(z)$ bude opět racionální funkce lomená

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

Pro polynom jmenovatele platí

$$B(z) = \prod_{k=1}^K (1 - e^{p_k T} z^{-1}) Y_k$$

Zhývá určit koefficienty v polynomu čítatele $A(z)$. Rozvedeme-li diskrétní obraz v řádu, dostaneme

$$F(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3} + \dots \quad (30)$$

kde koefficienty f_n jsou amplitudy funkce $f(t)$ v časech $t = nT$. Hodnoty koeficientů f_n však známe, nebo je lze vypočítat ze vztahu

Z rovnice (30) plyne

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$$

odkud porovnáním koeficientů u stejných mocnin proměnné z získáme rovnice pro výpočet jednotlivých členů polynomu $A(z)$

$$\begin{aligned} a_0 &= f_0 \\ a_1 &= b_1 f_0 + f_1 \\ a_2 &= b_2 f_0 + b_1 f_1 + f_2 \\ &\vdots \\ a_n &= \sum_{i=0}^n f(iT) b_{n-i} \end{aligned}$$

Tyto vztahy platí i pro modifikovanou transformaci, kde

$$F(z; m) = \frac{A(z; m)}{B(z)} = f_0(m) + f_1(m) z^{-1} + f_2(m) z^{-2} + \dots$$

Pro koeficienty polynomu čítatele platí

$$a_n(m) = \sum_{i=0}^n f(i+m) T^i b_{n-i}$$

Tento postup lze změnit použitím tehdy, když je obraz funkce posunuté o celistvý násobek periody vzorkování (právě v tomto způsobu). V závěru této knihy je uveden program v jazyce ALGOL pro výpočet diskrétních obrazů funkci, které nemají násobnost polu spojitého obrazu \mathcal{Z} větší než 2.

15. VÝPOČET PŘENOSOVÝCH FUNKCÍ OBKODŮ SE VZORKOVÁNÍM

Stanovení přenosových funkcí obvodu složených z několika článků je u systémů se vzorkováním poněkud složitější než u ohodlných spojivých soustav. Známá pravidla blokové algebry o sériovém a paralelním spojení zustávají v plamnosti, záleží však na tom, že jednotlivé články jsou spojeny přímo nebo je-li mezi nimi spojení vzorkovací člen. Podstatou tohoto problému ukazujeme na příkladu sériového spojení dvou prvků s přenosovými funkcemi $F_1(p)$ a $F_2(p)$.

Předpokládejme nejdříve, že oba články jsou spojeny přímo (bez vzorkovací), a na vstup prvního článku přímo dle vzorkovanou funkci $y^*(nT)$ (obr. 39). Na výstupu druhého článku je spojiva funkce $x(f)$. Výpočtem pomocí transformace \mathcal{Z} nebo \mathcal{Z}_m můžeme ovšem získat pouze hodnoty vzorkované funkce $x^*(nT)$, resp. $x[(n+m)T]$, a proto je v obr. 39 symbolicky zapojen na výstup vzorkovač. Pro obraz funkce $x^*[n+m]T$ platí

$$X(z; m) = \mathcal{Z}_m\{F_2(p) Y^*(p)\}$$

Pro obraz spojité funkce $x(f)$ platí

$$Y(p) = F_1(p) Y^*(p)$$

kde $Y^*(p)$ je obraz vzorkované funkce $y^*(nT)$ v diskrétní Laplaceové transformaci. Z obou rovin plyně

$$X(z; m) = \mathcal{Z}_m\{F_1(p) F_2(p) Y^*(p)\} = \mathcal{Z}_m\{F_1(p) F_2(p)\} Y(z) = F_1 F_2(z; m) Y(z)$$

Diskrétní přenos celého spojení tedy je

$$F(z; m) = \frac{X(z; m)}{Y(z)} = \mathcal{Z}_m\{F_1(p) F_2(p)\} = F_1 F_2(z; m)$$

Celkovou přenosovou funkci přímého sériového spojení dvou nebo více spojitech pracujících článků vypočítáme tak, že nejdříve vynásobíme jejich přenosy v oblasti p

Obr. 39. Sériové spojení článků bez vzorkovací

Podle vztahů o posunutí v originále lze psát

$$F(z; m) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}_m \left\{ \frac{F_1(p)}{p} \right\} = \frac{z - 1}{z} \mathcal{Z}_m \left\{ \frac{F_1(p)}{p} \right\}$$

Přenos soustavy s tvarovacem byl v též nazývaném stupňovitým přenosem soustavy.

a výsledný výraz podrobíme transformaci \mathcal{Z} (popřípadě \mathcal{Z}_m). V zápisu je tento postup symbolizován tím, že indikáční znak proměnné z je uveden až za všemi písmeny, která označují jednoduché členy sériového spojení.

Druhý případ, kdy mezi jednotlivé články je zapojen vzorkovací člen, ukazuje schéma na obr. 40. Pro obraz symbolický vzorkované funkce $x[(n+m)T]$ platí

$$X(z; m) = \mathcal{Z}_m\{F_2(p) Y^*(p)\} = F_2(z; m) Y(z)$$

Vstupní veličina článku $F_2(p)$ je diskrétní a platí

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{F_1(p) Y^*(p)\} = F_1(z) Y(z)$$



Obr. 39. Sériové spojení článků bez vzorkovací

Po dosazení do první rovnice dostaneme

$$X(z; m) = F_2(z; m) F_1(z) Y(z)$$

a přenosová funkce celého spojení je ve tvaru

$$F(z; m) = \frac{X(z; m)}{Y(z)} = F_2(z) F_1(z) Y(z)$$

Celkovou přenosovou funkci sériového spojení dvou nebo několika článků spojených vzorkovacími členy vypočítáme jako součin diskrétních přenosů jednotlivých článků. V zápisu je mechanismus výpočtu patrný z toho, že znak proměnné z stojí za každým písmenem, symbolizujícím přenos jednotlivých článků spojení. Přenosové funkce některých blokových schémat, která se v regulární technice často vyskytují, jsou uvedeny v tab. 2.

Na vstupu spojení, pracujících článků je obvykle zapojen tvarovací člen. Ve většině případů to je tvárování multěho řádu (obr. 41). Je-li přenos samotné soustavy $F_S(p)$, je jeho celkový spojitek

$$F_C(z; m) = \frac{X(z; m)}{Y(z)} = \mathcal{Z}_m\{F_{TR}(p) \cdot F_S(p)\} = \mathcal{Z}_m\left\{\frac{1 - e^{-Tp}}{p} \cdot F_S(p)\right\}$$



Obr. 40. Sériové spojení článků s tvarovacím členem

Podle vztahů o posunutí v originále lze psát

$$F_C(z; m) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}_m \left\{ \frac{F_S(p)}{p} \right\} = \frac{z - 1}{z} \mathcal{Z}_m \left\{ \frac{F_S(p)}{p} \right\}$$

Celkovou přenosovou funkci přímého sériového spojení dvou nebo více spojitech pracujících článků vypočítáme tak, že nejdříve vynásobíme jejich přenosy v oblasti p

Další koeficient není křeha vypočítat, neboť u přenosu, kde $f(0) = 0$ a soustava neobsahuje reálné dopravní zpoždění mezi T , stačí znát n koeficientů, kde n je řád jmenovatele $F_{Sp}(p)$. Přenos soustavy s tvarosetem tedy je

$$F_c(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{0,6686z^{-1} + 0,0466z^{-2}}{1 - 1,1566z^{-1} + 0,3012z^{-2}}$$

Správnost numerického výpočtu zkoušejeme použitím věty o koncové hodnotě funkce $x(t)$. Podle obr. 42 je zřejmé, že, když vstupní funkce jednoho kvádu je ustálena hodnota výstupní funkce $x(t)$ rovna jedné



Obr. 42. Znázornění tvaru signálního řetězu skokové změny při průchodu vzorkovacém, tvarovacím a regulačovacím soustavou

funkce $x(t)$. Podle obr. 42 je zřejmé, že, když vstupní funkce jednoho kvádu je ustálena hodnota výstupní funkce $x(t)$ rovna jedné

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F_c(z) Y(z) := \lim_{z \rightarrow 1} F_c(z) = \frac{0,1146}{0,1146} = 1$$

neboť

$$Y(z) = \frac{z}{z - 1} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Výpočet diskrétních přenosů soustav s dopravním zpožděním.

V regulační technice se často využívají soustavy, které mají tzv. dopravní zpoždění, charakterizované přenosem

$$F_S(p) = e^{-Jp} F_I(p)$$

Přenosové funkce této soustavy transformaci Z vypočítáme pomocí věty o posunutí v originále. Řešení provedeme pro $J \leq T$, neboť v opačném případě lze psát $J = rT + J$ a zpoždění o r period vznikování výjádříme násobením obrazu $F_I(z)$ činitelem z^r . Pro diskrétní přenos $F_S(z)$ platí

$$F_S(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{C} F_I(s) e^{-Ts} e^{-JzT} ds = \frac{1}{1 - e^{-JzT}} ds$$

Pomocí rovnice (18) upravíme tento vztah na tvar

$$F_S(z) = z^{-1} \mathcal{Z}_m \{F_I(p)\}_{m=1-T}^T$$

Diskrétní přenosovou funkci článku s dopravním zpožděním vypočítáme tak, že modifikovaný obraz přenosu soustavy bez zpoždění násobíme činitelem z^{-1} a za parametr m dosadíme $m = 1 - \frac{J}{T}$.

Poněkud obtížnější je výpočet modifikovaného diskrétního obrazu. Nejprve je třeba rozlišit, zda pro danou hodnotu modifikačního parametru m platí $m > \frac{A}{T}$ nebo $m < \frac{A}{T}$. Pro $m < \frac{A}{T}$ je výpočet shodný s předcházejícím případem, pouze reálnost parametru \tilde{m} , který dosadíme do vypočítaného obrazu, je nutné určit ze vztahu

$$\tilde{m} = 1 - \frac{A}{T} + m$$

Pro $m > \frac{A}{T}$ má definiční integral tvar

$$\begin{aligned} F(z; m) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{C} F_I(s) e^{-Ts} \cdot e^{(1-JzT+m)s} \frac{1}{1 - e^{-JzT}} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{C} F_I(s) e^{(m-A)Ts} T \cdot \frac{1}{1 - e^{-JzT}} ds \end{aligned}$$

což je výraz totálný s definicí modifikovaného obrazu pro hodnotu parametru $\tilde{m} = m - \frac{A}{T}$. Násobení výrazem z^{-1} odpadá. Konkrétní postup ukazuje následující příklad.

Příklad

Soustava má přenos

$$F_S(p) = \frac{e^{-0,6p}}{p}$$

K soustaré je připojen tvarovač můltého kvádu. Vypočítejte modifikovaný diskrétní přenos pro $T = 2s$

a) pro $m < \frac{0,6}{2} = 0,3$ platí

$$F_{S1}(z; m) = z^{-1} \frac{z - \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{2}} \mathcal{Z}_m \left\{ \frac{1}{p^2} \right\}_{m=1-0,3+0,3}$$

Modifikovaný obraz funkce p^{-2} najdeme ve slovníku obrazů

$$F_{S1}(z; m) = \frac{z - 1}{z^2} \cdot \frac{T[\tilde{m}z^2 + (1 - \tilde{m})z]}{(z - 1)^2}$$

odkud po úpravě a dosazení $\tilde{m} = 1 - 0,3 + 0,3 = 0$ dostaneme

$$F_{S1}(z; m) = \frac{(1,4 + 2m) + (0,6 - 2m)z^{-1}}{(z - 1)}$$

b) pro $m > \frac{0,6}{2} = 0,3$ platí

$$F_{S2}(z; m) = \frac{z - 1}{z} \mathcal{Z}_m \left\{ \frac{1}{p^2} \right\}_{m=0,3} = \frac{T[\tilde{m}z + T(1 - \tilde{m})]}{(z - 1)}$$

Dosadíme-li konkrétní hodnoty, dostaneme

$$F_{S2}(z; m) = \frac{(2m - 0,6)z + 2(1 - m + 0,3)}{(z - 1)}$$

Pro kontrolu vypočítáme pomocí tétoho obrazu hodnoty týstrapní funkce $x(t)$, je-li na vstup přivedena skoková funkce, v časech $t_n = nT$; $t_m = (n + 0,2)T$; $s/t_k = (n + 0,8)T$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(t_n) = F_{S1}(z) \frac{z}{z - 1} = \frac{1,4z + 0,6}{(z - 1)^2} = 1,4z^{-1} + 3,4z^{-2} + 5,4z^{-3} + \dots$$

$$X(z; 0,2) = F_{el}(z; 0,2) \frac{z}{z-1} = \frac{1,8z + 0,2}{(z-1)^2} = 1,8z^{-1} + 3,8z^{-2} + \dots$$

$$X(z; 0,8) = F_{el}(z; 0,8) \frac{z}{z-1} = \frac{z^2 + z}{(z-1)^2} = 1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + \dots$$

Z vypočítaných hodnot můžeme sestavit tab. 3. Graf funkce $x(t)$ je na obr. 43. V tomto případě snadno vypočítáme $x(t)$ analyticky. Platí $x(t) = (t - 0,6) u_1(t - 0,6)$, kde $u_1(t)$ je správné.

Tabulka 3. Hodnoty odlesky článku se zpožděním

$t [s]$	0	0,4	1,6	2,0	2,4	3,6	4,0	4,4	5,0	5,4
$x(t)$	0	0	1,0	1,4	1,7	3,0	3,4	3,8	5,0	5,4

16. STABILITY OBVODU SE VZORKOVÁNÍM

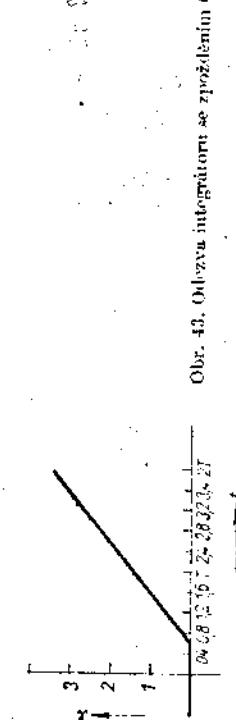
Jako stabilní definujeme takový systém, jehož výstupní veličina při působení omezeného vstupního signálu mályvá rovněž omezené hodnoty. Je-li přenosová funkce uzavřeného obvodu $F_W(z)$ v rozvinutém tvaru

$$F_W(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3} + \dots$$

pak pro amplitudu výstupní veličiny $x(nT)$ při jednotkové vstupní veličině platí

$$x(nT) = \sum_{i=0}^n f_i$$

Má-li být splněna dřív uvedená podmínka týkající se omezené hodnoty $x(nT)$,



Obr. 42. Obrzuvu integratoru se zpožděním 0,6 s

musí být součet koeficientů f_n v rozvoji přenosové funkce $F_W(z)$ konečný. Diskrétní přenosovou funkci $F_W(z)$ můžeme rozložit na částečné zlomky

$$F_W(z) = \frac{A_1 z}{z - a_1} + \frac{A_2 z}{z - a_2} + \dots + \frac{A_k z}{z - a_k} \quad (31)$$

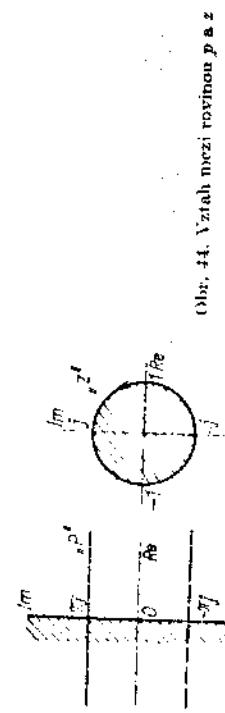
kde a_1, a_2, \dots, a_k jsou koeficienty jmenovatele přenosové funkce (koeficienty charakteristického polynomu). Pro koeficienty f_n platí

$$f_n = f(nT) = A_1 a_1^n + A_2 a_2^n + \dots + A_k a_k^n \quad (32)$$

Předcházející podmínka stability bude splněna teď, když budou-li jednotlivé členy na pravé straně rovnice (32) s narážajícím n konvergovat k nule. To bude tehdy, když budou-li splňena podmínka $|a_i| < 1$.

Systém se vzniklému je stabilní, když-li koeficienty charakteristické rovnice uvnitř jednotkové kružnice v rovině z .

K tomuto závěru můžeme dítě ze vztahu mezi diskrétní Laplaceovou transformací a transformací \mathcal{Z} . V případě stabilního lineárního spojitého systému musí koeficienty charakteristické rovnice ležet v levé polovině roviny p . Mezi rovinou p



Obr. 43. Vztah mezi rovinou p a z

a rovinou z platí vztah $z = e^{j\omega T}$. Imaginární osa (hranice stability pro koeficienty charakteristické rovnice) se tímto přírazem transformuje na jednotkovou kružnici v rovině z (obr. 44). Protože uvedené zobrazení je konformní, musí soubě odpovídající oblasti ležet na stejně straně kružnice křivky. V daném případě stabilní oblast leží vlevu, postupujeme-li ve směru šípek, tj. ve smyslu narůstajícího kmitočtu ω . Protože $\pi \omega - \omega_0 < m < \omega$ je jednotková kružnice prohlášena nekonečněrlátkou, je často definován základní interval kmitočtu $-\pi/T < \omega \leq \pi/T$, odpovídající jednomu oběhu kružnice v rovině z .

Kritérium stability. Pro posouzení stability obvodu v konkrétních příkladech je třeba znát rozložení koeficientů charakteristické rovnice a podle jejich polohy rozhodnout o stabilitě. V teorii lineárních spojitých obvodů existují různá kritéria stabilit, která umožňují posouzení obvodu bez znalosti skutečných hodnot koeficientů. Z nejpoužívanějších je to Nyquistovo kritérium, vycházející z frekvenční charakteristiky otevřené smyčky a dle algoritma algebriackého (Haworthovo, Routhovo-Scharrovo apod.), která pracuje s koeficienty charakteristického polynomu. Tyto algoritmy jsou natolik známé, že byly žádoucí pomocí shodného transformačního vztahu ω , pro kterou lze již použít jednotkového kruhu z zpět na levou polovinu nové roviny ω , pro kterou lze již použít drívě uvedený algoritmy. Tomuto požadavku výhovuje tzv. bilineální transformace, definovaná vztahem

$$\omega = \frac{\pi n - 1}{T} \quad (32a)$$

Nechť přenosová funkce uzavřeného obvodu je dána ve tvaru racionalního meně funkce

$$F_W(z) = \frac{1(z)}{B(z)} \quad (32b)$$

Pro posouzení stability je třeba výšetřit koeficienty charakteristické rovnice $B(z) = 0$. Nejdříve tedy pomocí vztahu (32a) provedeme polynom $B(\omega)$ na odpovídající polynom v rovině ω , $B(\omega)$. Tento polynom pak podložíme testu stabilitý některým základním algebriackým kritériem (např. Hurwitzovým).

Příklad

$$F_W(z) = \frac{z^2 + 0,2z - 0,5}{z^3 - 1,2z^2 + 0,45z - 0,05}$$

Do charakteristické rovnice

$$z^3 - 1,2z^2 + 0,45z - 0,05 = 0$$

dosadíme vztah (32a)

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 - 1,2\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 0,45\left(\frac{w+1}{w-1}\right) - 0,05 = 0$$

odkud po úpravě dostaneme tvar polynomu $B(w)$

$$B(w) = 0,2w^3 + 1,2w^2 + 3,9w + 4,7 = 0$$

Pro zjištění stability použijeme Hurwitzova algoritmu

$$\begin{vmatrix} 1,2 & 0,2 \\ 4,7 & 3,9 \end{vmatrix} = 3,74 > 0$$

Jak je zřejmé, systém je stabilní. To souhlasí s rozložením kořenů polynomu $B(z)$, neboť platí

$$B(z) = (z - 0,2)(z - 0,3)^2$$

takže jednodlivé kořeny jsou $z_1 = 0,2$; $z_{2,3} = 0,3$.

Příklad

Prenosová funkce otevřeného obvodu (ohr. 45) je

$$F_0(z) = \frac{k \cdot 0,2z}{(z-1)(z-0,6)}$$

Hledáme kritické zesílení k_1 , při kterém je systém na mezi stability. Pro přenos otevřeného obvodu platí

$$F_{\text{tr}}(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{k \cdot 0,2z}{z(z-1)(z-0,6) + 0,2kz}$$



Obr. 45. Příklad regulátoru obvodu se verzorováním

odkud s použitím bilineární transformace získáme charakteristický polynom $B(w)$

$$B(w) = 0,2kw^3 + 0,8w^2 + 3,2 - 0,2k$$

Pro stabilní systém musí mít všechny koeficienty u jednotlivých mocnin w stejně znaménko. Podmínka stabilitu tedy zní

$$3,2 - 0,2k > 0$$

podle má charakteristický polynom $B(z)$ jeden kořen právě na jednotkové kružnici $z_1 = -1$.

Stabilní systém se verzorováním lze vyšetřovat i bez bilineární transformace přímo z polynomu $B(z)$. Platí následující věta: polynom n -tého řádu s reálnými koeficienty b_k ,

$$B(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0 = 0$$

má všechny kořeny uvnitř jednotkového kruhu tehdy, platí-li

$$|b_n| > |b_0| \quad (33)$$

a kořeny rovnice $(n-1)$ řádu

$$B_1(z) = \frac{1}{z} \left[b_n B(z) - b_0 B\left(\frac{1}{z}\right) z^n \right] = 0$$

leží všechny uvnitř jednotkového kruhu. Opačným postupem (snížením řádu) dojdeme nakonec k rovnici prvního řádu, jejíž kořen již snadno vypočítame. Pro

vypočet koeficientu b_1^1 polynomu $B_1(z)$

$$B_1(z) = b_{n-1}^1 z^{n-1} + b_{n-2}^1 z^{n-2} + \dots + b_1^1 z + b_0^1$$

platí

$$b_{n-1}^1 z = b_n b_{n-2} - b_0 b_1$$

Příklad

Testu stability podrobíme stejný polynom jako v předešlém případě

$$B(z) = z^3 - 1,2z^2 + 0,45z - 0,05 = 0$$

Protože $1 > 0,05$, je podmínka (33) splněna. Koefficient nového polynomu $B_1(z)$ jsou

$$b_1^2 = 1^2 - (-0,5)^2 = 0,9975$$

$$b_1^1 = 1 \cdot (4 - 1,2) - (0,05) \cdot 0,45 = -1,1775$$

$$b_0^1 = 1 \cdot 0,45 - (-0,5) \cdot (-1,2) = 0,39$$

Novy polynom $B_1(z)$ má tvar

$$B_1(z) = 0,9975z^2 - 1,1775z + 0,39 = 0$$

Podmínka (33) je opět splněna, neboť $0,9975 > 0,39$ a pro koeficienty dalšího polynomu platí také

$$b_1^2 = 0,9975^2 - 0,39^2 = 0,8429$$

$$b_0^2 = 0,9975(-1,1775) + 0,39 \cdot 1,1775 = -0,7153$$

Kořen tohoto polynomu je $z_2 = 0,8486$ a systém je tedy stabilní.

Kromě dvoch uvedených kritérií existuje pro diskrétní systémy i ohodba algoritmických kritérií typu Hurwitzova kritéria. Jeden z různých koefficientů charakteristického polynomu je $z_2 = 0,8486$ a systém je tedy stabilní.

• systém je na mezi stability pro $k_1 = 16$. Snadno se přesvědčíme, že v tomto pří-

teristického polynomu $B(z)$ reálné sestavíme n determinanta podle tohoto schématu

$$A_k = \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_{n-k+1} \\ b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_{n-k+2} \\ b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 & 0 & b_n & \cdots & b_{n-k+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \\ b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{k-1} \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-k+1} & b_{n-k+2} & b_{n-k+3} & \cdots & b_n & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{vmatrix}$$

Jacu-li všechny takto sestavené determinanty různé od nuly, vyšetřovaný polynom nemá kořeny na jednotkové kružnici a počet kořenů uvnitř jednotkové kružnice je roven počtu změn znaménka v posloupnosti $1, A_1, A_2, \dots, A_n$. Protože výpočet determinantu vysokých řádků je poměrně pracný, není používání tohoto kriteria příliš výhodné.

Mnohem častěji používaný je tzv. Juryho test (nazvaný podle autora prof. Juryho), i když běží vlastně jen o zjednodušení algoritmu použitého pro Schurovo kritérium. Charakteristickou rovinou předpokládáme opět re traru

$$B(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0 = 0$$

S z koeficientům b_k sestavíme první dva řádky tabu. 4. Koeficienty c_k a d_k jsou daný determinantu

$$c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-k} \\ b_n & b_k \end{vmatrix}, \quad d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-1-k} \\ c_{n-1} & c_k \end{vmatrix}$$

Tabu. 4. Schéma algoritmu pro výpočet stabilitu obvodu

Rádek	z^0	z^1	z^2	z^3	\vdots	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	b_0	b_1	b_2	b_3	\cdots	b_{n-3}	b_{n-2}	b_n
2	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\cdots	$b_{2, f}$	b_1	b_0
3	c_0	c_1	c_2	c_3	\cdots	c_{n-2}	c_{n-1}	c_n
4	c_{n-1}	c_{n-2}	c_{n-3}	c_1	\cdots	c_{n-2}	c_{n-1}	c_n
5	d_0	d_1	d_2	d_3	\cdots	d_{n-2}	d_{n-1}	d_n
6	d_{n-2}	d_{n-3}	d_{n-4}	d_0	\cdots	d_{n-2}	d_{n-1}	d_n
z^{n-5}	r_0	r_1	r_2	r_3	\cdots	r_{n-3}	r_{n-2}	r_n
z^{n-4}	r_3	r_2	r_1	r_0	\cdots	r_{n-3}	r_{n-2}	r_n

Nutné a postačující podmínky pro stabilitu systému jsou:

$B(1) > 0 \dots$ součet koeficientů charakteristické rovnice je kladný
 $B(-1) > 0$ pro n sudé
 $B(-1) < 0$ pro n liché

$|b_0| < h_n$
 $|c_0| > |c_{n-1}|$
 $|d_0| > |d_{n-2}|$
 $|r_0| > |r_2|$

O stabilitě uzavřeného obvodu se pak lze přesvědčit pomocí věty:

Lineární impulsová soustava s přenosovou funkcií otevřené smyčky ve trauru (34) je stabilní tehdy, jestliže pravidelně křivky

$$F(jz) = \frac{A(e^{jz})}{B(e^{jz})}$$

opsané z bodu $(-1, j0)$ pro z z intervalu $(0, \infty)$ je stále kladný a počet jeho polohodných kružnic, které leží vrně jednotkové kružnici.

Příklad

Pro charakteristickou rovinu

$$z^2 - 1,2z^2 + 0,45z - 0,05 = 0$$

je sestavena tab. 5. Jednotlivé podmínky jsou

$$B(1) = 0,2; B(-1) = -0,3; 0,05 < 1; 0,9975 > 0,39$$

Všechny podmínky jsou splněny, systém je stabilní.

Tabu. 5. Příklad výpočtu stability použitím Juryho testu

Rádek	z^0	z^1	z^2	z^3	\vdots	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	1	-0,05	0,45	-1,2	\vdots	\vdots	\vdots	1
2	2	1	-1,2	0,45	\vdots	\vdots	\vdots	-0,05
3	3	0,9975	1,1775	-0,39	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Soubor podmínek pro rovinu druhého řádu je

$$B(1) > 0; B(-1) > 0; |b_0| < |b_2|$$

Příklad

Pro stabilitu systému na obr. 45, jehož charakteristická rovnice je

$$z^2 - (1,6 - 0,2k)z + 0,6 = 0$$

platí

$$\begin{aligned} B(1) &= 0,2k & \text{odkud } k > 0 \\ B(-1) &= 3,2 - 0,2k & \text{odkud } k < 16, \end{aligned}$$

což odpovídá druhé získaným výsledkům.

Geometrická kritéria stabilita. Kritéria vycházejí z geometrických vlastností impulsné frekvenční charakteristiky otevřeného obvodu nejsou u systému ve vztahovaném používání tak často jako ve spojitéch obvodech. Divořem je poměrně pracná konstrukce potřebných křivek. Pro úplnost však ukážeme druhé z těchto kriterií.

Nechť přenosovou funkcií otevřené smyčky je dána ve travru

$$F_0(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

O stabilitě uzavřeného obvodu se pak lze přesvědčit pomocí věty:

Lineární impulsová soustava s přenosovou funkcií otevřené smyčky ve trauru (34) je stabilní tehdy, jestliže pravidelně pravidelně

Problém při použití tohoto kritéria vznikl právě při konstrukci zminěné kritiky.

Nyquistovo kritérium, které je velmi často používáno v teorii spojých systémů, může poskytovat i v obvodu se vzorkováním. Předpokládejme, že systém má blokové schéma podle obr. 46. Podle rovnice (7) platí pro impulsovou frekvenční charakteristikou otevřeného obvodu

$$F_0^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_0(j\omega + jn\omega_s) \quad (35)$$

kde $F_0(j\omega) = F_1(j\omega) F_2(j\omega)$ a $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

Rezepcemi-li součet na pravé straně rovnice (35), dostaneme

$$F_0^*(j\omega) = \frac{1}{T} [F_0(j\omega) + F_0(j\omega + j\omega_s) + F_0(j\omega - \omega_s) + F_0(j\omega + 2j\omega_s) + \dots]$$



Obr. 46. Blokové schéma obecného jednoparametrického regulárního obvodu

Funkce $F_0^*(j\omega)$ je periodická s periodou ω_s , a stačí tedy sledovat interval $0 \leq \omega_s$. Za předpokladu, že původní charakteristika $F_0(j\omega)$ má charakter dolnopropustného filtru, můžeme vektory přenosu pro výšší kmitotoky zanedbat a impulsovou charakteristikou nahradit vztahem

$$F_0^*(j\omega) \approx \frac{1}{T} [F_0(j\omega) + F_0(j\omega + j\omega_s) + F_0(j\omega - j\omega_s) + F_0(j\omega - 2j\omega_s)]$$

Tuto funkci již lze i graficky sestrojit ze známého průběhu charakteristiky $F_0(j\omega)$.

Protože větve charakteristiky $F_0^*(j\omega)$ pro interval $0 \leq \omega \leq \frac{\omega_s}{2}$ a interval $\frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq \omega_s$ jsou symetrické podle reálné osy, stačí vypočítit jeden z uvedených intervalů.

Použijeme impulsovou frekvenční charakteristiky ke získání i z přenosové funkce $F_0(z)$. Základním zohrazením, které jednotkové kružnice v rovině z přiřadí imaginární osu v rovině w ,

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (36)$$

protože platí $z = e^{j\omega T}$ a imaginární osa v rovině p je definována vztahem $p = j\omega$, bude pro imaginární osu v rovině p , transformovanou nejprve do roviny z a pak do roviny w , platit

$$w = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\omega$$

Principiálně v bývá nazývána „pseudocharakteristiky“. Ve shodě s předcházejícimi tvrzeními je zřejmé, že na významu může ovšem v posledním intervalu $0 \leq \omega \leq \frac{2\pi}{T}$, neboť platí

$$\omega = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$$

oní je funkce periodická, s periodou $\frac{2\pi}{T}$. Použití obou uvedených metod v praxi následující příklad.

Příklad

Blokové schéma obvodu je na obr. 47. Impulsovou frekvenční charakteristikou otevřeného systému je popsán vztahem

$$F_0^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-jT(\omega+n\omega_s)}}{j(\omega + n\omega_s)} \cdot \frac{K}{j(\omega + n\omega_s)}$$



Obr. 47. Blokové schéma obvodu z příkladu na ponížení Nyquistova kritéria stability

Prototíp $\sigma = j(T\omega + n\omega_s) = e^{-jT\omega}$, miňeme pak

$$F_0^*(j\omega) = - \frac{K}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-jn\pi}}{(\omega + n\omega_s)^2} = - \frac{K}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \omega_s T) + j \sin \omega_s T}{(\omega + n\omega_s)^2}$$

Pro ω z intervalu $(0; \frac{2\pi}{T})$ má tato charakteristika jediný průseček s reálnou osou,

$$\omega = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

neboť jediné pro kmítotest

$$\omega = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$

je imaginární složka rovná nula. Reálná složka $F_0^*(j\omega)$ má pro tento kmítotest hodnotu

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F_0^* \left(j \frac{\pi}{T} \right) &= - \frac{K}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2T^2}{(2n+1)^2 \pi^2} = \\ &= - \frac{2KT}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) = - \frac{2KT}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = - \frac{KT}{2} \end{aligned}$$

neboť platí

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

Reálná složka impulsové frekvenční charakteristiky je v tomto případě konstantní

pro všechna ω , neboť

$$\operatorname{Re} F_0^*(j\omega) = \frac{K}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos nT}{\left(\omega + n\frac{T}{\pi}\right)^2} = -\frac{KT}{4\pi^2} \frac{(1 - \cos \omega T)\pi^2}{\sin^2 \frac{\omega T}{2}} \cos \omega^2 \left(-\frac{\omega T}{2}\right) =$$

$$= -\frac{KT}{4} \frac{2 \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\omega T}{2}} = -\frac{KT}{2}$$

Obr. 48. Impulsová frekvenční charakteristika ustanoveného obvodu, jednotek schéma je na obr. 47

Systém bude stabilní tehdy, bude-li splněna podmínka

$$KT < 2$$

Chceme-li použít druhého postupu, stanovime nejprve obraz \mathcal{Z} přenosové funkce otevřené snyžky

$$F_0(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-Tz}}{p} \cdot \frac{K}{p} \right\} = \frac{KT}{z - 1}$$

Dosadíme z výrazu

$$z = \frac{1 + w}{1 - w}$$

$$F_0^*(w) = \frac{(1 - w) KT}{2w}$$

a zavedeme „pseudofrekvenci“ $w = j\nu$

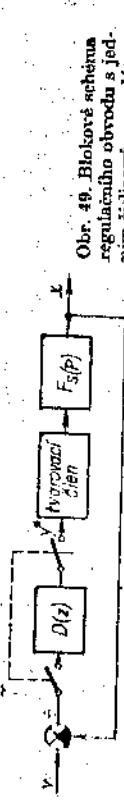
$$F_0^*(j\nu) = \frac{(1 - j\nu) KT}{2j\nu} = -\frac{KT}{2} - j \frac{KT}{2\nu}$$

Tvar impulsové frekvenční charakteristiky je zřejmý z obr. 48. Podle Nyquistova kritéria dostaneme pro stabilní systém stejnou podmíinku jako při předchozí metodě.

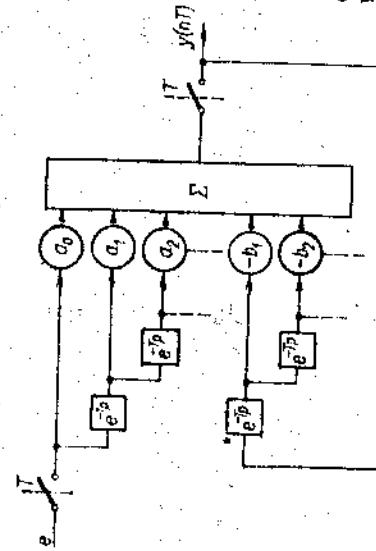
IV. NÁVRH ŘÍDICÍCH ALGORITMŮ

Pro návrh řídícího algoritmu se používají různých metod. Výběr nevhodnějších z nich závisí na daných požadavcích. Dívejte sež popisem jednoho metody, název verzí mezi pětadvaceti funkcí číslicového regulačního algoritmu $D(z)$ a programem pro algoritmus řízení. Pro přenos korekčního členu (pořítače) v obr. 49 platí

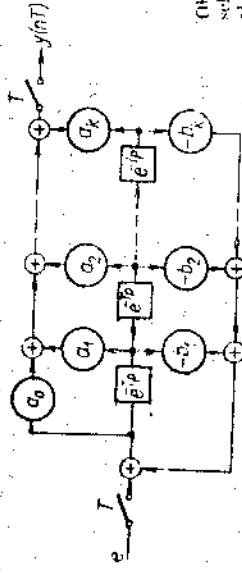
$$D(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_k z^{-k}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_l z^{-l}} \quad (37)$$



Obr. 49. Blokové schéma regulačního obvodu s jednoduchým diskrovým regulačorem



Obr. 50. Blokové schéma programu řídícího algoritmu



Obr. 51. Zjednodušené schéma programu řídícího algoritmu

Pro hodnotu akční veličiny v čase $t_s = nT$ vypočítáme z rovnice (37) pomocí zpětné transformace \mathcal{Z} vztah

$$y(nT) = a_0e(nT) + a_1e[(n-1)T] + a_2e[(n-2)T] + \dots + a_ke[(n-k)T] - b_2y[(n-2)T] - \dots - b_3y[(n-k)T]$$

Okamžitá hodnota akční veličiny $y(nT)$ je dána součtem $(k+1)$ různých od násobených koeficientů a_0 až a_k až b_2 . Blokové schéma na obr. 50 znázorňuje hodnot akční veličiny, je třeba $2k+1$ násobení až bunek pro památkování třídič algoritmu. Pro realizaci bunek se v každé periodě posouvá. Toto schéma lze překreslit do tvaru uvedeného na obr. 51. Prota předchůzimu zpísobu programování zde uspořádáme polovinu pramenných bunek.

17. NÁVRH ŘÍDICÍHO ALGORITMU PODLE POŽADOVANÝCH VLASTNOSTÍ PŘENOSU ŘÍZENÍ

Předpokládejme, že regulační obvod má blokové schéma podle obr. 49. Přenosovou funkci travorete a soustavy označme $F(z)$, takže pro travorat multivitru platí

$$F(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p} R(s) \right\} = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left(\frac{R(s)}{p} \right) \quad (38)$$

Přenosovou funkci uzavřeného obvodu pro řízení je

$$F_W(z) = \frac{D(z) F_C(z)}{1 + D(z) F_C(z)}$$

Stanovíme-li na základě daných požadavků konkrétní tvar této funkce, můžeme upravit uvedeného vztahu využít přenos řídícího podílu

$$D(z) = \frac{1}{F_C(z)} \cdot \frac{F_W(z)}{1 - F_W(z)} \quad (39)$$

V následujících odstavcích této kapitoly ukážeme, jak se jednotlivé požadavky na statické i dynamické vlastnosti regulačního promítanou do tvaru požadované přenosové funkce $F_W(z)$.

3) Realizovatelnost řídícího členu. Přenos spojuje části obvodu (travorete a soustavy) je dán pomocí druhu polynomu $P(z)$ a $Q(z)$, přičemž $Q(z)$ je o m výššího řádu než polynom $P(z)$

$$P(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = g_m z^{-m} + g_{m-1} z^{-(m-1)} + \dots$$

V důsledku toho akční zásah přivedený v čase $t = 0$ se na výstupu soustavy může projevit až za m period. Kromě toho, že regulační soustava zpísobuje zpoždění pro cházajícího signálu o m period.

Přenosovou funkci řízení můžeme také zapsat ve tvaru mocniné řady

$$P_W(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = f_m z^{-m} + f_{m-1} z^{-(m-1)} + \dots$$

Ridici člen $D(z)$ je realizovatelný pouze tehdy, plati-li $m \leq n$.

Tato podmínka vyplyrá přímo z rovnice (39), dosadime-li jednotlivé přenosy v rozvitu tvaru

$$D(z) = \frac{1}{g_m z^{-m} + g_{m-1} z^{-(m-1)} + \dots + (h_m z^{-m} + h_{m-1} z^{-(m-1)} + \dots)}$$

Není-li $m \leq n$, má nejméně jeden člen na pravé straně této rovnice kladný exponent n proměnné z , a to znamená, že vystupní veličina řídicového regulačního hodnotu musí předcházet vlastní vstupní, což není fyzikálně reálné ovratné.

Pokud regulovaná soustava neobsahuje žádatel s dopravnou zpožděním T_a rovný nebo větší o jednu periodu, vztokorani T , je $n = 1$. Soustava zpísobuje zpoždění signálu o jednu periodu. Nejdřív k tomu jiné důrody, může v takovém případě mit přenosová funkce tvaru

$$F_W(z) = f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots$$

b) Regulace na nulovou ustálenou odchylku. K vytáčení podmínky pro $F_W(z)$, zadáme-li nulovou odchylku v ustáleném stavu, použijeme vztu o konečné hodnotě vztokorany funkce. Pro obvod na obr. 49 platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e[nT] = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - z^{-1}) E(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - z^{-1}) [W(z) - X(z)] = 0$$

Dosadíme

$$X(z) = F_W(z) W(z)$$

a dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - z^{-1}) W(z) [1 + F_W(z)] = 0$$

Pro jednotlivé typy řídicího signálu $w(t)$ musí $F_W(z)$ splňovat tyto podmínky:

pro $w(t) = \text{konst.}, \text{ tj.}$

$$W(z) = \frac{T_2}{z - 1}$$

platí

$$1 - F_W(z) = (1 - z^{-1}) G(z)$$

kde $G(z)$ je libovolná racionalní funkce lomená (ovšem bez pólu $z = 1$) pro $w(t) = t, \text{ tj.}$

$$W(z) = \frac{T_2}{(z - 1)^2}$$

platí

$$1 - F_W(z) = (1 - z^{-1})^2 G(z)$$

a konečně pro $w(t) = t^2, \text{ tj.}$

$$W(z) = \frac{T^2 z(z + 1)}{(z - 1)^3}$$

platí

$$1 - F_W(z) = (1 - z^{-1})^3 G(z)$$

Tyto podmínky můžeme obecně formulovat vztu:

Trvalá regulační odchyka, při řídicím signálu $x(t)$ ho rádu je nulová, tedy,

$$1 - F_W(z) = (1 - z^{-1})^{k+1} G(z)$$

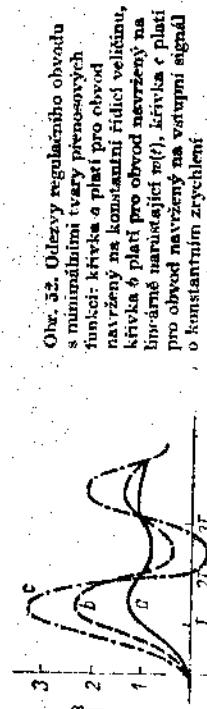
Pokud nemáme na přenos řízení další požadavky, můžeme volit $G(z) = 1$. Pak dostaneme tzv. minimální tvary přenosových funkcí. Podle typu vstupního signálu $w(t)$ platí

$$\text{Při } w(t) = w_0 \quad F_W(z) = z^{-1}$$

$$\text{Při } w(t) = w \quad F_W(z) = z^{-1} - z^{-2}$$

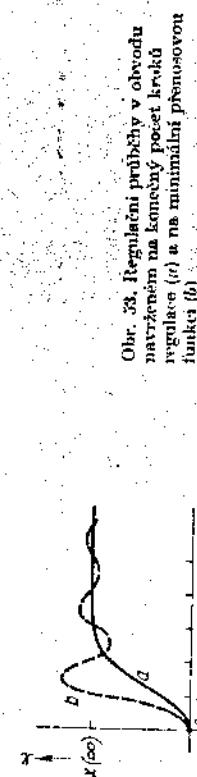
$$\text{Při } w(t) = b t^2 \quad F_W(z) = 3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$$

Odezvy obvodu s těmito přenosovými funkcemi na skok řídicího signálu jsou nakresleny na obr. 52.



Obr. 52. Odezvy regulačního obvodu s minimálními tvary přenosových funkcí: křivka a plati pro obvod navržený na konstantní řídicí veličinu, křivka b plati pro obvod navržený na binárně narušující m(t), křivka c plati pro obvod navržený na vstupní signál o konstantním zrychlení.

c) Konstantní doba trvání přechodného děje. Zde je třeba rozlišovat dvě případy. Požadavek, aby přechodný děj byl konečný pouze, pokraji se týká okamžitých vzorkování (príběh naznačený na obr. 53 čárkován), a požadavek rozšířený na příběh mezi časy $t_n = nT$ (plná křivka v obr. 53). Prvni podmínku lze formulovat tak, že differenze dvou po sobě následujících hodnot $x(nT)$ a $x((n+1)T)$ musí být od určitého k nulové. V druhém případě musí tomuto požadavku vypo-



Obr. 53. Regulační průběhy v obvodu navrženém na konstantní počet kroků regulačce (n) a na minimální přenosovou funkci (b).

vorat i diference hodnot $x((n+m)T)$ a $x((n+1+m)T)$ pro $0 \leq m < 1$. Při H-diem signálu typu jednotkového skoku platí pro amplitudy výstupní veličiny $x(nT)$ rovnice

$$x(nT) = \sum_{i=0}^m f_i$$

$$F_W(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots$$

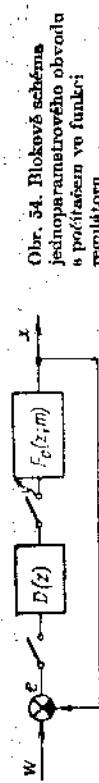
Kde koeficienty f_i určíme z rozvoje přenosu funkce řízení

Má-li být splněno dříve uvedená podmínka týkající se diferenčního děje, musí od času $t_k = kT$ platit

$$x[(k+j)T] = x(kT) \quad \text{pro } j = 1, 2, 3, \dots, m$$

To ovšem znamená, že platí $f_i [(k+j)T] = 0$, a tedy rozvoj přenosové funkce $F_W(z)$ musí mit konečný počet členů. Podmíinku konečné doby trvání přechodného děje formuluje věta:

Přechodný děj v regulačním obvodu je píji zaněch řidicí veličiny konečný (v okamžitých vzorkování), jestliže přenosovou funkci řízení lze vyjádřit polynomem o konečném počtu členů. Přechodný děj je konečný i v basech mezi okamžiky vzorkování, jestliže i $F_W(z; m)$ má konečný počet členů pro všechna m z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Tuto podmíinku lze splnit pouze tehdy, odsahuje-li funkce $F_W(z; m)$ cestovatelnou polynomem, ponejvíce první části obvodu $P(z; m)$.



Má-li obvod blokové schéma podle obr. 54 a jednoduché přenosy jsou definovány vztahy

$$D(z) = \frac{A(z)}{B(z)}; \quad F_C(z; m) = \frac{P(z; m)}{Q(z)}$$

pak pro přenos řízení platí

$$F_W(z; m) = \frac{D(z) \cdot F_C(z; m)}{1 + D(z) \cdot F_C(z)} = \frac{A(z) \cdot P(z; m)}{B(z) \cdot Q(z) + A(z) \cdot P(z)}$$

Volitelné jsou polynomový přenos číslicového regulátoru $A(z)$ a $B(z)$, přenos $F_W(z)$ však musí obsahovat polynom $P(z)$.

Podobným způsobem lze dokázat, že akční veličina $y(nT)$ bude od určitého času kT konstantní (konečný počet kroků regulačce) pouze tehdy, bude-li spinána širší podmínka konečného přechodového děje.

d) Stabilita obvodu se soustavou, jejíž diskrétní přenos obsahuje nuly a půly mimo jednotkovou kružnici v torzově z. Přenosová funkce řízení $F_W(z)$ musí v tomto případě vyhovovat dalším požadavkům. Předpokládejme, že přenos $F_C(z)$ lze psát ve tvaru

$$F_C(z) = \frac{z + a}{z + b} \cdot Q_C(z)$$

kde $|a| \geq 1$ i $|b| \geq 1$ a zbytková funkce $Q_C(z)$ již má všechny nuly i půly určené jednotkové kružnicí. Pro jednoduchost jsme zvolili příklad, kdy pouze jedna nula $(-a)$ a jeden pól $(-b)$ leží vně jednotkové kružnice. Pro přenos řízení platí

$$F_W(z) = \frac{D(z) \cdot F_C(z)}{1 + D(z) \cdot F_C(z)} = \frac{B(z) \cdot (z + b) + A(z) \cdot (-a) \cdot Q_C(z)}{B(z) \cdot (z + b) + A(z) \cdot (-a) \cdot Q_C(z)}$$

Požadujeme, aby tato funkce měla určitý žádaný tvar $F_W(z)$, takže pro přenos regulátoru platí

$$D(z) = \frac{1}{F_C(z)} \cdot \frac{F_W(z)}{1 - F_W(z)} = \frac{(z + b)}{(z + a)} \cdot \frac{1}{Q_C(z)} \cdot \frac{F_W(z)}{1 - F_W(z)}$$

Pokud matematický model soustavy reprezentovaný přenosem $F_C(z)$, zcela přesně odpovídá skutečnosti, bude mít až půlý přenos soustavy kompenzovány polynomy a nulami přenosu regulařnímu a skutečný přenos řízení bude roven požadovanému. Tento stav však v praxi nikdy nebude dosažen, neboť každý přenos je pouze všechny méně dokonale approximací skutečných vlastností soustavy. Nechť abstraktně hodnoty a a \bar{a} jsou, ležících vnitř jednotkové kružnice, jsou $\bar{a} = a + \Delta a$, $\bar{b} = b + \Delta b$. Přenos řízení užívajícího obrodu pak je

$$\begin{aligned} F_W(z) &= \frac{z+b}{z+a} \cdot \frac{1}{Q_C(z)} \cdot \frac{F_{W_R}(z)}{1-F_{W_R}(z)} \cdot \frac{z+\bar{a}}{z+\bar{b}} \cdot Q_C(z) \\ &= \frac{(z+b)(z+\bar{a})(1-F_{W_R}(z)) + (z+b)(z+\bar{a})F_{W_R}(z)}{1+\text{číselo}} = \end{aligned}$$

V tomto případě ke kompenzaci nedojde, vzhledem k tomu že diplové členy, které způsobí nestabilitu celého obvodu.

Stabilita obvodu bude zachována pouze tehdy, když je zadáná přenosová funkce řízení vyhovující podmírkám

$$\begin{aligned} F_{W_R}(z) &= (z+a) M(z) \\ 1 - F_{W_R}(z) &= (z+b) N(z) \end{aligned} \quad (40)$$

kde $M(z)$ a $N(z)$ jsou volitelné polynomy. Pro přenos regulařního pak platí

$$D(z) = \frac{(z+b)}{(z+a)} \cdot \frac{1}{Q_C(z)} \cdot \frac{(z+\bar{a})M(z)}{(z+b)N(z)} = \frac{M(z)}{N(z)Q_C(z)}$$

a pro skutečný přenos řízení

$$F_W(z) = \frac{(z+\bar{a})M(z)}{(z+\bar{b})N(z)+(z+\bar{a})M(z)} = \frac{F_{W_R}(z)+\delta(z)}{1+\epsilon(z)}$$

Pokud se předpokládá, že skutečné hodnoty nul a polí řízení o malé hodnoty, jsou i koeficienty v polynomech $\delta(z)$ a $\epsilon(z)$ malé a skutečný přenos řízení se bude málo lišit od žádaného přenosu. Nasledující příklady slouží pro ilustraci odvozených závislostí.

Příklad

Regulovaná soustava má spojity přenos

$$F_S(p) = \frac{1}{p(20p+1)^2}$$

Tvarovací člen je nultého rádu a perioda vzorkování je $T = 10$ s. Diskrétní přenos celého spojení je

$$\begin{aligned} F_C(z) &= \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p^2(20p+1)^2} \right\}_{T=10} = \\ &= 0,324z^{-1} \cdot \frac{(1 + 2,9506z^{-1})(1 + 0,2090z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0,6065z^{-1})^2} \end{aligned}$$

Později jeme, aby ustálena odchylika při konstantním řízení byla rovna nule. Z toho vyplyvá podmínka

$$1 - F_{W_R}(z) = (1 - z^{-1}) G(z)$$

Nebudeme-li respektovat skutečnost, že v přenosu soustavy se vyskytuje jedna nula $(-2,9506)$ a jeden pol $(+1)$ mimo vnitřek jednotkové kružnice, můžeme volit $G(z) = 1$ a tedy $F_{W_R}(z) = z^{-1}$. Číslový regulařní přenos má přenos

$$D(z) = \frac{3,0684z^{-1} - 0,6065z^{-2}}{(1 + 2,9506z^{-1})(1 + 0,2090z^{-1})}$$

Jeli skutečná hodnota přenosu soustavy

$$F_C(z) = 0,324z^{-1} \cdot \frac{(1 + 2,5z^{-1})(1 + 0,2090z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0,6065z^{-1})}$$

bude skutečný přenos řízení

$$\begin{aligned} F_W(z) &= \frac{(1 + 2,5z^{-1})z^{-1}}{(1 + 2,5z^{-1})z^{-1} + (1 + 2,9506z^{-1})(1 - z^{-1})} = \\ &= \frac{z + 2,5}{z^2 + 2,9506z - 0,4508} \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice je pouze druhého rádu a její kořeny jsou

$$z_{1,2} = \frac{-2,9506 \pm \sqrt{8,7 + 1,8}}{2} = \begin{cases} -0,147 \\ -3,0953 \end{cases}$$

Jeden kořen je mimo jednotkovou kružnici a obvod je tedy nestabilní.

Budeme-li respektovat drív uvedené požadavky s přehledem ke stabilitě systému, bude přenos řízení popisán rovnicemi

$$F_{W_R}(z) = (1 + 2,9506) M(z)$$

Druhá rovnice současně zajistuje splnění podmínky mimořádně ustálené odchyly. Tvarovací polynom $M(z)$ a $N(z)$ určíme z požadované rovnosti koeficientů u stojivých mocnin proměnné z

$$(1 - z^{-1})(1 + n_1 z^{-1}) = 1 - (1 + 2,9506z^{-1}) n_1 z^{-1}$$

Koeficienty n_0 a n_1 jsou rovny nule z důvodu fyzikální realizovatelnosti systému, když obou polynomu volume tak, aby výsledná soustava rovně jednoznačně určovala všechny koeficienty. Porovnaním výrazů na obou stranach rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} n_1 - 1 &= -n_1 \\ -n_1 &= 2,9506n_1 \end{aligned}$$

a tuto soustavu rovnic výhodněj hodnoty $n_1 = 0,253$, $n_1 = 0,747$.

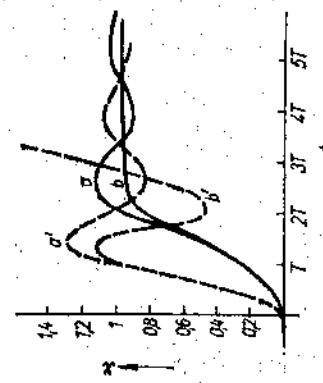
Požadovaný přenos řízení má tvar

$$\begin{aligned} F_{W_R}(z) &= 0,233z^{-1} + 0,747z^{-2} \\ &= 0,324z^{-1} \cdot \frac{(1 + 2,5z^{-1})(1 + 0,253z^{-1} + 0,474z^{-2})}{(1 + 2,9506z^{-1})(1 + 0,253z^{-1} - 0,747z^{-3})} = \\ &= \frac{0,2532 + 0,632}{z^2 - 0,115} \end{aligned}$$

Kořeny charakteristické rovnice jsou

$$z_1 = \pm \sqrt{0,115} = \pm 0,339$$

takže obvod je stabilní. Na obr. 55 jsou nakresleny průběhy regulované veličiny při skokovém změně řízení. Krivka a platí v případě, že soustava má předpokládaný přenos, krivka b odpovídá změněnému přenosové funkci. Čárkován jsou nakresleny odemy při řidicím algoritmu, který nerespektoval podmínky (40).



Obr. 55. Odemy obvodu, u kterého se přenos regulované soustavy o mnoho liší od předpokládaného přenosu

Příklad

Regulovaná soustava má spojitý přenos

$$F(p) = \frac{1}{(5p+1)(p+1)}$$

Připojen je tvarovaný nultý řádu, perioda vzorkování je $T = 5$ s. Požadujeme nulovou ustálenou odchytku při konstantním řízení a konečný regulární děj.

Modifikovaný diskrétní přenos spojité části obvodu je

$$\begin{aligned} F_C(z; m) &= \mathcal{Z}_m \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \cdot \frac{1}{(5p+1)(p+1)} \right\} = \frac{p z^2 + p z + p_0}{q_2 z^2 + q_1 z + q_0} \\ p_2(m) &= 1 - 1,25 e^{-5m} + 0,25 e^{-5m} \\ p_1(m) &= 1,2584 e^{-5m} - 0,3420 e^{-5m} - 0,3746 \\ p_0(m) &= 0,0025 - 0,0084 e^{-5m} + 0,0920 e^{-5m} \\ q_2 &= 1 \\ q_1 &= -0,3746 \\ q_0 &= 0,0025 \end{aligned}$$

Pro $m = 0$ má přenos hodnotu

$$F_C(z) = \frac{0,5418z + 0,0861}{z^2 - 0,3746z + 0,0025}$$

Podle požadavků má přenos řízení výhovovat rovnici

$$\begin{aligned} F_W(z) &= P(z) R(z) \\ 1 - F_W(z) &= (1 - z^{-1}) G(z) \end{aligned}$$

Z hlediska realizovatelnosti musí první členy volitelných polynomů mit hodnoty $r_0 = r_1 = 0$ a $q_0 = 1$. Další členy určíme z rovnice

$$1 - (0,5418z + 0,0861) r_2 z^{-2} = (1 - z^{-1})(1 + q_1 z^{-1})$$

za které stvornáním koeficientů u stejných mocnin z dostaneme

$$0,5418r_2 = 1 - q_1$$

$$0,0861r_2 = q_1$$

Soustavě vyhoví hodnoty $r_2 = 1,5926$ a $q_1 = 0,1371$. Požadovaný přenos řízení má tvar

$$F_W(z) = 0,8629z^{-1} + 0,1371z^{-2}$$

Přenos číslicového řidicího členu je

$$D(z) = 1,5926 \cdot \frac{1 - 0,3746z^{-1} + 0,0025z^{-2}}{1 - 0,8629z^{-1} - 0,1371z^{-2}}$$

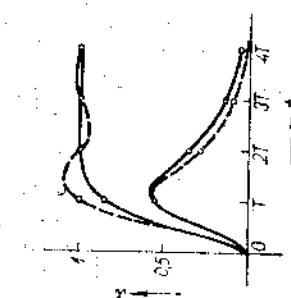
Průběh odemy na jednotkovou změnu řídí veličiny je na obr. 56 (plná čára). Pro odemy na konstantní poruchu jednotkové velikosti, písoncích na vstupu do soustavy, platí

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{F_C U(z)}{1 + F_C(z) D(z)} = \frac{0,5418z^{-1} + 0,1604z^{-2} + 0,0118z^{-3}}{1 - 0,3746z^{-1} + 0,0025z^{-2}} \\ &= 0,5418z^{-1} + 0,3634z^{-2} + 0,1466z^{-3} + 0,0540z^{-4} + \dots \end{aligned}$$

Graf této odemy je rovněž nakreslen na obr. 56.

Pro stvornání využíváme ještě chování ohvodu s algoritmem řízení, navrženým podle podmínky nulové ustálené odchyly k konečnému přechodnému deje jen pokud se tyká času vzorkování. Přenos řízení bude splňovat pouze podmínu

$$1 - F_W(z) = (1 - z^{-1}) G(z)$$



Obr. 56. Odevery obvodu a dvoukapečitní soustavou na změnu řízení a konstantní poruchu

kde $G(z)$ je konečný polynom. Je zřejmé, že můžeme volit $G(z) = 1$ a pak $F_W(z) =$

$\equiv z^{-1}$, Přenos řidicího členu nyní je

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1 - 0,3746z^{-1} + 0,0025z^{-2}}{(0,5418z^{-1} + 0,0861z^{-2})} \cdot \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})} = \\ &= 1,8457 \frac{1 - 0,3746z^{-1} + 0,0025z^{-2}}{1 - 0,8411z^{-1} - 0,1589z^{-2}} \end{aligned}$$

Pro blížší určení tvaru odzvý na skokové proměnné řízení vypočítáme přenos v modifikované transformaci

$$\frac{Q(z)}{P(z)} \cdot \frac{F_W(z)}{1 - F_W(z)} \cdot \frac{P(z; m)}{Q(z)} = \frac{P(z; m)}{P(z)} \cdot F_W(z) =$$

$$= \frac{p_2(m) z + p_1(m) + p_0(m) z^{-1}}{1 - F_W(z)}$$

$$= \frac{0,5418 z + 0,0861}{1 - F_W(z)}$$

Maximální hodnoty nabývají odzvá ve druhé perioďe. Pro obraz odzvý platí

$$X(z; m) = F_W(z; m) \cdot W(z) = \frac{P(z; m)}{P(z)} \cdot \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} =$$

$$= \frac{p_2(m)}{0,5418} + \frac{p_1(m) + 0,8411 p_2(m)}{0,5418} z^{-1} + \dots$$

Pro čas $t_m = T(1 + m)$, ve kterém nastává maximum, musí být

$$\frac{dx_2(m)}{dm} = \frac{d}{dm} \left(\frac{p_1(m) + 0,8411 p_2(m)}{0,5418} \right) = 0$$

Dosedací číselné hodnoty a dosudanéme

$$0,2070 e^{-m} - 0,1317 e^{-2m} = 0$$

odkud platí

$$m = -\frac{1}{4} \ln \frac{0,5070}{0,2893} = 0,2893$$

Čas $t_m = 5(1 + 0,2893) s = 6,4465 s$ a maximální velikost odzvý je

$$x_2(T, 1,2893) = 1,0899$$

Práhový odzvý na skokovou změnu řízení i konstantní periový, posobí opět na vstupní soustavy, jsou naznačeny v obr. 56 čárkováné. Odzvá na pomociu má obraz samotné soustavy (s trávováním) na jednotkový impuls:

$$X_u(z) = \frac{F_U(z)}{1 + D(z) F_C(z)} = F_U(z) (1 - z^{-1}) = F_C(z)$$

takže odzvá na poruchový signál typu jednotkového skoku je totičná s odzvou

$$\begin{aligned} \text{pro } 0 \leq t < T & \quad x(t) = 1 - 1,25 e^{-0,3t} + 0,25 e^{-t} \\ \text{pro } T \leq t & \quad x(t) = 1,25 e^{-0,3(t-1)} - 0,25 e^{-(t-1)} - 1 \\ & = 2,148 e^{-0,3t} - 36,85 e^{-t} \end{aligned}$$

Příklad

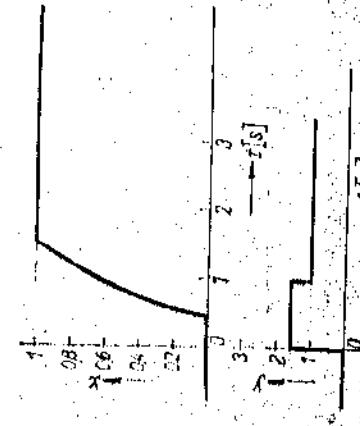
Konečnou dobu regulace můžeme dosahovat i tehdy, odsahuje-li regulovaná soustava dopravní zpoždění. Často se přenosi tohoto typu používá k approximaci skutečných přenosových funkcí. Výhodou je, že řídicí algoritmy jsou pouze druhého řádu a nároky na paměť a rychlosť řídicího počítače nejsou příliš velké.

Nechť přenos soustavy je v tvaru

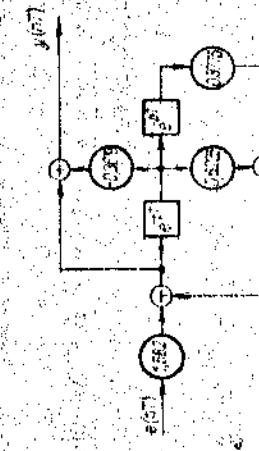
$$P_S(p) = \frac{e^{-ap}}{zp + 1}$$

a trávovací číslo opět multitého řádu. Dále předpokládejme, že platí $a < T$. Dopravný přenos celé soustavy je

$$F_C(z) = \mathcal{Z}_m \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \cdot \frac{1}{zp + 1} \right\} z^{-1} = \frac{(1 - e^{-c}) - (z - c) z^{-1}}{z - d}$$



Obr. 57. Práhový regulovaný výkon
a vstupní výkon v druhé a současnou,
která má dopravný zpoždění



Obr. 58. Blokové schéma řídicího
algoritmu

kde

$$d = e^{-\frac{T}{\tau}}, \quad c = e^{-\frac{T}{\tau}(1-\frac{a}{T})}$$

Při požadované nulové ustálené odchyle pro konstantní řídicí výkon bude přenos řídicího členu

$$D(z) = \frac{(z - d) z}{(1 - d) z^2 - (1 - c) z + (d - c)}$$

Tak např. pro hodnoty $T = 1$, $\tau = 1$, $a = 0,5$ bude $d = 0,3679 z^{-1}$, $c = 0,6065$ a přenos $D(z)$

$$D(z) = 1,5820 \frac{1 - 0,3679 z^{-1}}{1 - 0,62255 z^{-1} - 0,3775 z^{-2}}$$

Přenos řízení je

$$F_W(z) = \frac{1}{1-d} [(1-c)z^{-1} + (c-d)z^{-2}] = 0,6255z^{-1} + 0,3775z^{-2}$$

Tvar odězvy na jednotkovou změnu řízení a odpovídající průběh skuteční veličiny $y(nT)$ jsou nakresleny na obr. 57. Grafické znázornění řidicího algoritmu je na obr. 58.

Příklad

Postup návrhu řidicího algoritmu založený i tehdy, klademe-li na příbeh regulárního děje zryšené požadavky. Zvětší se počet podmínkových rovnic a tím pracnost výpočtu. Regulovaná soustava je třetího řádu, asymptotická a její spojity přenos (včetně tvarovacího člena) je

Fc(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p^2(20p + 1)^2}

Při periodě vzorkování $T = 10 \text{ s}$ je odpovídající diskrétní přenos

$$Fc(z) = \frac{(1 + 2,95z^{-1})(1 + 0,21z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 6,907z^{-1})^2} \cdot 0,324z^{-1}$$

Požadujeme konečný počet kroků regulace a mimoústředou odchyliku při lineárně narůstajícím řidicím signálu $a(t) = t$. Jednotlivé požadavky formuluji následující podmínkové rovnice

1. fyzikální realizovatelnost regulátoru

$$F_{IR}(z) = f_1 z^{-1} + \dots$$

2. stabilita

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{IR}(z) &= (1 + 2,95z^{-1})M(z) \\ 1 - F_W(z) &= (1 - z^{-1})N(z) \end{aligned}$$

3. mimoústředou odchyliku

$$1 - F_W(z) = (1 - z^{-1})^2 G(z)$$

Tato podmínka je přísnější, než určuje druhá rovnice (pod 2).

4. konečný regulační děj

$$F_W(z) = (1 + 2,95z^{-1})(1 + 0,21z^{-1})z^{-1}R(z)$$

Tento požadavek je opět přísnější než první podmínka bodu 2. Můžeme tedy cely bod 2 vynechat, a nahradime jej body 3. a 4. Vzhledem k hodinám 1. a 4. budou mit volitelné polynomy tvar

$$\begin{aligned} G(z) &= 1 + g_1 z^{-1} + \dots + g_k z^{-k} \\ R(z) &= r_0 + r_1 z^{-1} + \dots + r_{k-1} z^{-(k-1)} \end{aligned}$$

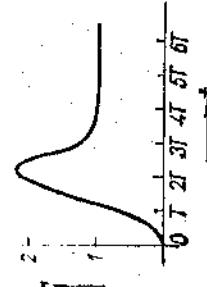
Koeficienty g_1, \dots, g_k a r_0, \dots, r_{k-1} vypočítáme z podmínky rovnosti koeficientů u stejných mocnin z v následující rovnici

$$\begin{aligned} (1 - z^{-1})(1 + 2,95z^{-1})(1 + 0,21z^{-1}) \cdot (r_0 + r_1 z^{-1} + \dots + r_{k-1} z^{-(k-1)}) &= \\ = 1 - z^{-1}(1 + 2,95z^{-1})(1 + 0,21z^{-1}) \cdot (r_0 + r_1 z^{-1} + \dots + r_{k-1} z^{-(k-1)}) & \end{aligned}$$

Počet neznámých koeficientů je roven počtu rovnic při $k = 3$. Odpovídající přenos třídi můžeme tvar

$$F_W(z) = 0,611z^{-1} + 1,53z^{-2} - 0,89z^{-3} - 0,25z^{-4}$$

Průběh odězvy na jednotkový skok řízení je na obr. 59. Jak je zřejmé, ohvod není pro tento typ signálu vhodné navrzen, neboť překmit je větší než 100 %. Je proto třeba upravit vlastnosti obvodu dalsím rozšířením požadavku. Postup je popsán v následujícím odstavci.



Obr. 59. Odězvy při návrhu na lineárně narůstající řidicí signál

e) Další požadavky na regulační pochod. Kromě požadovaných vlastností regulace, uvedených v předešlých odstavcích odstavce této kapitoly, je v některých případech nutné připojit další požadavky, vyplývající buď z konstrukčních podmínek, nebo z podmínek daných jinými kritérii. Nejčastěji to bývá maximální dovolený překmit a omezení akční velikiny vzhledem k realizaci tvarovacího člena. Splnění této dodatečných požadavků zajistíme formulací dalších podmínkových rovnic, které pak mají za následek rozšíření jak polynomu vyjadrujícího přenos řízení, tak i nároky na počet paměťových buněk řidicího počítače.

Maximální překmit odězvy můžeme změnit tak, že přenos řízení rozšíříme přidáváním polynomem, nejméně dvoučlenným. K jíž dráze uvedeným rovnicím přibude další ve tvaru

$$x(nT) = \sum_{i=0}^n f_i \leq (1 + 0,01H)$$

kde H je povolený překmit v procentech a f_i jsou koeficienty rozvoje přenosu řízení v nekoncovou řadu. Postup v praxi ukazuje následující příklad.

Příklad

Regulační ohvod, u kterého požadujeme mimoústředou odchyliku při lineárně narůstajícím řidicím veličině, má přenos řízení ve tvaru

$$F_W(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

což vyplývá z podmínky

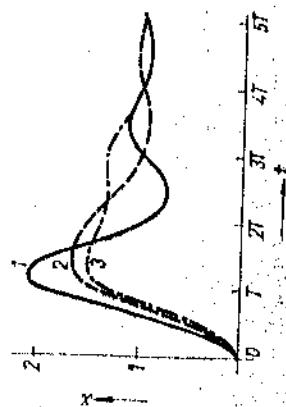
$1 - F_W(z) = (1 - z^{-1})^2 G(z)$
kde $G(z) = 1$. Překmit odězvy na skokově proměnný signál je 100% pokud se týká časů vzorkování $t_n = nT$. Jelikož soustava výššího než prvního řádu, je skutečný

překmit ještě větší, jak ukazuje obr. 60. Přenos hranic rozdílení dvojčlennem a do stanovené tak rovnici

$$1 - F_W(z) = (1 - z^{-1})^2 (1 + g_2 z^{-1})$$

Pro amplitudy odemy na jednočlenný skok řízení plati

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(T) &= 2 - g_1 \\ x(2T) &= 1 + g_1 \\ x(3T) &= 1 \\ \vdots & \end{aligned}$$



Obr. 60. Odemy obvodu korigovaného s přiběhantem k maximálnímu dovolenému překmitu:

1. nekorigovaný systém;

2. přenosová funkce rozšíření dobrojenem;

3. přenosová funkce rozšíření trojčlennem.

$$F_W(z) = 1.5z^{-1} - 0.5z^{-3}$$

Použijeme-li regulační poehod pouze podle hodnot odemy v okamžích vzorkování, bude zjevně optimální, když $y_1 = 0.5$. Přenos hranic pak je

$$F_W(z) = 1.5z^{-1} - 0.5z^{-3}$$

a průběh odemy odpovídá křivce 2. v obr. 60. Rozšířme-li původní přenosovou funkci trojčlennem, bude pro amplitudy $x(nT)$ platit

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ x(T) &= 2 - g_1 \\ x(2T) &= 1 + g_1 - g_2 \\ x(3T) &= 1 - g_2 \end{aligned}$$

Pokud přibližněm opět pouze k časům vzorkování, je optimální volba konstant $g_1 = 0.67$; $g_2 = 0.33$, neboť pak amplitudy $x(nT)$ pro $n = 1, 2, 3$ jsou stejné, rovněž 1.33 (křivka 3 v obr. 60). Zde už je ale vhodné sledovat též skutečné maximum a na novém algoritmu upravíme s ohledem na celkový průběh.

Z fyzikálního názoru vyplývá, že čím rychlejší má být přechodný díl, čím dříve má být dosaženo žádané hodnoty, tím větší amplitudy akční veličiny je třeba poslat. Akční veličina je však rázem omezena co do maximální amplitudy a k tomu rovněž 1.33 (křivka 3 v obr. 60). Zde už je ale vhodné přiblížit při návrhu řídicího algoritmu, že odpovídající akční zásahy využijí z pásma linearity, místostanou plnit. Pro akční veličinu pochoď neprobíhá podle stanovených podmínek.

$$Y(z) = \frac{D(z)}{1 + F_C(z) D(z)} W(z) = \frac{F_W(z)}{F_C(z) D(z)} W(z)$$

Tabelta 6. Hodnoty odemy regulační odemy a akční veličiny při použití dvojčlenných řídicích algoritmů

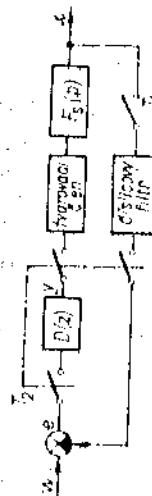
	t	0	T	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$	$6T$	$7T$
$W(nT)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$X(nT)$	0	1.52	1.71	0.93	0.89	0.97	0.95	0.99	0.99
D_1	$E(nT)$	-1	-0.52	-0.71	-0.07	0.11	0.93	0.02	0.01
$Y(nT)$	2.8	1.66	0.38	0.97	1.03	0.93	0.99	1.00	
$X(nT)$	0	1.5	1.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
D_2	$E(nT)$	1	-0.5	-0.5	0	0	0	0	0
$F(nT)$	2.77	1.29	0.60	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Jestliže při dovolené velikosti vstupních signálů překročí jednotlivé amplitudy $y(nT)$ stanovené meze, je nutné opravit opět přenos $F_W(z)$. Pro systém na obr. 61 byly navrheny dva řídicí algoritmy, které splňují podmínu minimálně ustálěné odemy



Obr. 61. Blokové schéma obvodu s mezcitem

při lineárně nastavěném řídicím signálu. Algoritmus $D_1(z)$ odpovídá přenosu $F_W(z) = 2z^{-1} - z^{-3}$, kdežto algoritmus $D_2(z)$ je vypočítán pro přenos $F_W(z) = 1.5z^{-1} - 0.5z^{-3}$. Hodnoty akční veličiny, odchylyky a regulované vzdálenosti ustálěny v tab. 6. Rozšíření trasy přenosových funkcí je tento třeba volit i z důvodu důvodu.



Obr. 62. Blokové schéma obvodu s dvojí periodou vztorkování a číslicovou filtracej

Perioda měření (vztorkování) regulované reličiny je v praxi určována nejen s ohledem k potřebám regulace, ale též na podkladě požadavků daných provozními informačními systémy, sledováním mezních hodnot apod. Tak se může stát, že takto perioda vztorkování je menší, než jaká by byla optimální s ohledem na omezení akční veličiny. V systému pak je možné zavést dvojí periodu vztorkování. Periodu T_1 pro měření a periodu T_2 pro akční zásahy. V takovém případě pak lze signál z číslaře regulované veličiny podrobit číslicové filtrace a snížit tak vliv náhodných poruch (obr. 62).

má být ustálena odchylka nulová a počet kroků regulace konečný. Přenos poruchy musí tedy splňovat rovnice

$$F_U(z) = (1 - z^{-1})(g_0 + g_1 z^{-1} + \dots)$$

$$F_U(z) = P(z)(r_0 + r_1 z^{-1} + \dots)$$

Diskrétní přenos soustavy s trávoražem je

$$F_C(z) = \frac{0,5418z^{-1} + 0,0861z^{-2}}{1 - 0,3746z^{-1} + 0,0025z^{-2}}$$

Soustava zpravidla prochází signal o jednom impulu a první deny volitelných polynomů mají tedy hodnoty $g_0 = 0$, $g_1 = p_1$, $r_0 = 1$. Porovnáním koeficientů v obou podmínkových rovnicích vypočítáme hodnoty ostatních členů

$$(1 - z^{-1})(g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2}) = (0,5418z^{-1} + 0,0861z^{-2})(1 + r_1 z^{-1})$$

$$g_1 = 0,5418; \quad g_2 = 0,0861; \quad r_1 = -1$$

Přenos poruchy pak je

$$F_U(z) = 0,5418z^{-1} - 0,4557z^{-2} - 0,0861z^{-3}$$

a přenos řidicího členu

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1}{F_U(z)} - \frac{1}{F_C(z)} = \frac{1 - Q(z)(1 - z^{-1})}{P(z)(1 - z^{-1})} = \\ &= \frac{1,3746 - 0,3771z^{-1} + 0,0025z^{-2}}{0,5418 - 0,4557z^{-1} - 0,0861z^{-2}} \end{aligned}$$

Pro přenos řidicího členu platí

$$F_W(z; m) = \frac{F_C(z; m) D(z)}{1 + F_C(z) D(z)} = F_U(z; m) D(z)$$

Pořadí daných podmínek přenosu poruchy je

$$F_U(z; m) = P(z; m)(1 - z^{-1})$$

a přenos řidicího členu

$$D(z) = \frac{F_C(z) - F_U(z)}{F_C(z) F_U(z)}$$

Dosadíme-li tyto vztahy do rovnice pro přenos řizeni, dostaneme

$$\begin{aligned} F_W(z; m) &= P(z; m)(1 - z^{-1}) \frac{\frac{P(z)}{Q(z)} - P(z)(1 - z^{-1})}{\frac{P(z)}{Q(z)} \cdot F(z)(1 - z^{-1})} = \\ &= \frac{P(z; m)}{P(z)} [1 - Q(z)(1 - z^{-1})] \end{aligned}$$

Z této rovnice je zřejmé, že přechodný děj při změně řidicí veličiny je konečný pouze v okamžických vzorkování, neboť přenos $F_W(z; m)$ má koncový počet členů jen při $m = 0$. Pak platí

$$F_W(z) = 1,3746z^{-1} - 0,3771z^{-2} + 0,0025z^{-3}$$

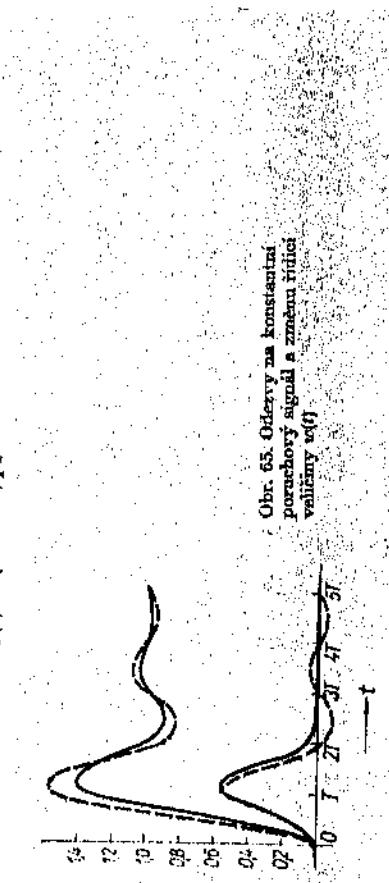
Pro časy, rovné polovině periody vzorkování, vypočítáme

$$F_W(z; 0,5) = \frac{0,3606 + 0,3966z^{-1} - 0,1833z^{-2} - 0,0010z^{-3}}{0,5418 + 0,0861z^{-1}}$$

Odery na jednotkový skok řizeni a poruchy jsou nakresleny na obr. 65 (přehled kivky).

Když býhom požadovali při skokové poruše přechodný děj konečný pouze v časech vzorkování, stačilo by, aby přenos poruchy vyhovoval formuli

$$F_U(z) = (1 - z^{-1}) p_1 z^{-1}$$



Obr. 65: Odery na konstantní porachový signál a změnu řidicího člena v časech vzorkování.

kde p_1 je první člen v rozvoji funkce $F_U(z)$. To vyplývá z požadavku realizovatelnosti řidicího členu. Pro určený příklad platí

$$F_U(z) = 0,5418z^{-1} - 0,5418z^{-2}$$

a přenos řidicího člena nyní je

$$D(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Q(z)}{P(z)} = \frac{1,5336 - 0,3771z^{-1} + 0,0025z^{-2}}{0,5418 - 0,4557z^{-1} - 0,0861z^{-2}}$$

Přenos řizeni pak bude

$$\begin{aligned} F_W(z) &= p_1(1 - z^{-1}) z^{-1} \frac{\frac{P(z)}{Q(z)} - p_1(1 - z^{-1}) z^{-1}}{\frac{P(z)}{Q(z)} (1 - z^{-1})^2} = \\ &= 1,5336z^{-1} - 0,6209z^{-2} + 0,1013z^{-3} - \dots \end{aligned}$$

V tomto případě není přechodný děj konečný ani v okamžických vzorkování. Odery na skok řizeni i poruchy při tomto řidicím algoritmu jsou čárkované nakresleny na obr. 65.

19. REGULAČNÍ OBVODY SE DVĚMA KOREKČNÍMI ČLENY

V praxi jsou často požadovány na přenos řízení i poruchy kladeny současně. Ve většině případů netze však pomocí jediného řídícího prvku všechny požadavky splnit. Jako příklad uvedeme obvod, u kterého má být ustálená odchylka nulová jak při skokovém změně řízení, tak při konstantní poruše, a regulaci pochodiť má být v ohnou případech konečný. Musí platit následující rovnice

$$F_W(z) = P(z) \quad (44)$$

$$F_U(z) = (1 - z^{-1}) P(z) \quad (45)$$

$$s = \frac{1}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Předpokládáme, že přenos spojité části ohvodu je upraven na tvar

$$P_C(z) = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_n z^{-n}}{1 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots}$$

Jelí použít jeden řídící člen s přenosem $D(z)$, platí

$$F_W(z) = \frac{P_C(z) D(z)}{1 + P_C(z) D(z)}$$

$$F_U(z) = \frac{P_C(z)}{1 + P_C(z) D(z)}$$

pokud porucha působí na vstupu soustavy a mění se jen v časech vzorkování. Pro přenos řídícího člena plynou z předešlých rovinic

$$D(z) = \frac{P_U(z)}{F_U(z)} = \frac{s}{(1 - z^{-1})}$$

a současně

$$D(z) = \frac{1}{P_C(z)} \cdot \frac{F_W(z)}{1 - F_W(z)} = s Q(z) \cdot \frac{1}{1 - s P(z)}$$

Tyto dvě rovnice lze splnit pouze tehdy, platí-li

$$Q(z) = \frac{1 - s P(z)}{(1 - z^{-1})}$$

strojovém uspořádání celého systému (hardware). Zapojením řídícího člena $D_2(z)$ v rozsahu pouze požadavky na programové vyhavení řízení a poruchy pojeden dva řídící členy, platí pro přenosy řízení a poruchy

$$F_W(z) = \frac{P_C(z) D_1(z)}{1 + P_C(z) D_1(z) D_2(z)}$$

$$F_U(z) = \frac{P_C(z)}{1 + P_C(z) D_1(z) D_2(z)}$$

což lze vypočítat jednotlivě řídící algoritmy

$$D_1(z) = \frac{F_W(z)}{P_C(z) [1 - D_2(z) F_W(z)]}$$

$$D_2(z) = \frac{P_C(z) - F_U(z)}{P_C(z) F_U(z) D_1(z)}$$

Pro dráve uvedené požadavky [rownice (44) a (45)] dostaneme

$$D_1 = \frac{s}{(1 - z^{-1})}$$

$$D_2 = \frac{1 - (1 - z^{-1}) Q(z)}{s P(z)}$$

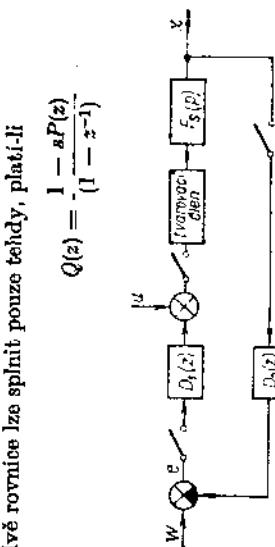
Příklad

Pro soustavu s diskrétním přenosem

$$F_C(z) = \frac{0,5418 z^{-1} + 0,0861 z^{-2}}{1 - 0,3746 z^{-1} + 0,0025 z^{-2}}$$

bude přenos řídícího člena v přímé větví

$$D_1(z) = \frac{1}{0,6279 (1 - z^{-1})} = \frac{1,5926}{(1 - z^{-1})}$$



Obr. 66. Blokové schéma obvodu se dvěma číslicovými regulátory

Tuto rovinici však přenos žádné reálné soustavy nesplňuje, a proto realizace obou požadavků jedním řídícím členem není možná. Pro zlepšení dynamických vlastností obvodu zařadíme do zpětné vazby druhý řídící člen. Blokové schéma takto upraveného obvodu je na obr. 66. Srovnáním se schématem přístrojového uspořádání (obr. 6) vidíme, že tato úprava neznamená žádat o změnu v pří-

Obr. 67. Odezvy na konstantní poruchu a změnu řízení v obvodu se číslicovými regulátory

a přenos korekčního člena ve zpětné vazbě

$$D_2(z) = \frac{1,5930 - 0,4370 z^{-1} + 0,0029 z^{-2}}{1 + 0,1589 z^{-1}}$$

Odezvy obvodu na jednotkovou skokovou změnu řízení i skok poruchy jsou na obr. 67.

**20. NÁVRH KIDICHO ALGORITMU PODLE POŽADOVANÉHO
PŘEKMITU A DOBY NARŮSTÁNÍ ODEZVY NA SKOKOVOU
ZNĚNU KIDIC VELIČINY**

Ve většině aplikací využívají pro návrh kidicích algoritmů metody popsané v předcházejících odstavcích této kapitoly. Někdy jsou však přímo zadány požadavky na dynamické vlastnosti obvodu při skokové změně řízení. Nejčastěji bývá zadán maximální překmit a doba navrstvení regulované veličiny. Vzhledem k tomu, že ide o systém se zpětnou vazbou, je jistým výpočet přenosu kidicího členu velmi



Obr. 68. Blokové schéma jednoparametrováho řízení bez povrchy



Obr. 69. Blokové schéma abvodu. Jehož chování z hlediska řízení je totičné s obrodem na obr. 68

obtížný. Použijeme proto symbolické náhrady. Původní obvod, jehož blokové schéma je na obr. 68, nařadíme symbolickým zapojením podle obr. 69. Přenos řízení v obou ohvodech musí být totičný

$$F_{W1}(z; m) = \frac{D(z)}{1 + D(z)} \frac{F_C(z; m)}{F_C(z)} = F_{W2}(z; m) = D_S(z) F_C(z; m) \quad (46)$$

Pro fiktivní sériový regulátor $D_S(z)$ tedy platí

$$D_S(z) = \frac{D_S(z)}{1 + D_S(z) F_C(z)}$$

a naopak

$$D(z) = \frac{D_S(z)}{1 - D(z) F_C(z)}$$

Pro výpočet žádaného tvaru sériového regulátoru použijeme maticevnuho zápisu. Každá vzdokorána vzdělina bude popsána sloupcovou maticí a přenosové funkce budou dány maticemi, kde n -ty řádek trojici koeficienty rozvoje přenosu v mořninou řadu a první člen řádku odpovídá koeficientu u n -té mocninu z . Tuk přenosu soustavy

$$F_C(z; m) = \frac{P(z; m)}{Q(z)} = f_0(m) z^{-1} + f_1(m) z^{-2} + \dots$$

odpovídá matici

$$\mathbf{F}(m) = \begin{bmatrix} f_0(m) & 0 & 0 & \dots \\ f_1(m) & f_0(m) & 0 & \dots \\ f_2(m) & f_1(m) & f_0(m) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Přebírá-li na trutu soustava akční vzdělina $y(nT)$, platí pro výstupní vzdělina $x_1[(n+m)T]$

$$\begin{bmatrix} x_0(m) \\ x_1(m) \\ x_2(m) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0(m) & 0 & 0 & \dots \\ f_1(m) & f_0(m) & 0 & \dots \\ f_2(m) & f_1(m) & f_0(m) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Tento zápis je jen jinou formou vzorce

$$x_1[(n+m)T] = \sum_{i=0}^n f_i(m) y_{n-i}$$

který plyně z výjádření v transformaci Z

$$X(z; m) = F_C(z; m) Y(z)$$

Podle schématu na obr. 69 platí

$$X_2 = F_C(m) D_S W_2 \quad (47)$$

Přenos sériového regulátoru D_S musíme zvolit tak, aby počet volitelných konstant odpovídal počtu požadavků. V našem případě jsou s přihlédnutím k dynamice obvodu dány dva požadavky, a v přenosu musí proto být dvě volitelné konstanty. Ustálená odchylna při konstantním řízení má být rovna nule. Tento další požadavek se týká ustálené hodnoty akční vzdělina $y_2(\infty)$. Je-li soustava statiku, se zevšeobecněm k_S , musí platit $y_2(\infty) = \frac{1}{k_S}$ a s použitím výty o konečné hodnotě dostaneme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2(nT) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - z^{-1}) D_S(z) W_2(z) = \lim_{z \rightarrow 1} D_S(z) = \frac{1}{k_S}$$

Jde-li o astatickou soustavu, musí být ustálená hodnota akční vzdělina rovna nule a pro součet všech akčních zásahů platí

$$\sum_{i=0}^x y(iT) = \frac{1}{k_S T}$$

Protože

$$Z \left[\sum_{i=0}^x y(iT) \right] = \frac{z}{z-1} Y(z)$$

platí pro $D_S(z)$ podmínka

$$\sum_{i=0}^x y(iT) = \lim_{z \rightarrow 1} D_S(z) \frac{z}{z-1} = \frac{1}{k_S T}$$

Přenos sériového regulátoru $D_S(z)$ rozdělíme na dvě části

Část $G_D(z)$ bude určovat dynamické vlastnosti systému, část $G_S(z)$ poměry v ustáleném stavu. Zrodlíme-li

$$G_D(z) = G_D(z) G_S(z)$$

$$G_D(z) = 1 + d_1 z^{-1} + dz^{-2}$$

bude $G_S(z)$ pro statické soustavy mít tvar

$$G_S(z) = \frac{1}{k_S(1 + d_1 + d_2)}$$

a pro astatické soustavy

$$G_S(z) = \frac{1}{T k_S(1 + d_1 + d_2)} \cdot \frac{z - 1}{z}$$

Pro astatické soustavy II. řádu stejným způsobem odvodíme

$$G_S(z) = \frac{2}{T^2 k_S(1 + d_1 + d_2)} \cdot \frac{(z - 1)^2}{z^2}$$

Koeficienty dynamické části regulátoru, d_1 a d_2 , vypočítáme podle daných požadavků na překmit a dobu narušení odezvy. Předpokládáme, že maximum nastává v druhé periodě, v čase $t_r = T(1 + r)$, $0 < r < 1$. Pro amplitudy regulačních veličin platí podle rovnice (47), dosadime-li $\mathbf{D}_S = \mathbf{G}_D \cdot G_S$

$$\begin{bmatrix} x_0(m) \\ x_1(m) \\ x_2(m) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0(m) & 0 & 0 & \cdots \\ f_1(m) & f_0(m) & 0 & \cdots \\ f_2(m) & f_1(m) & f_0(m) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ d_1 & 1 & 0 & \cdots \\ d_2 & d_1 & 1 & \cdots \\ 0 & d_2 & d_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_S \cdot \mathbf{W}_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Součin $\mathbf{G}_S \cdot \mathbf{W}_2$ pro jednotkový řídicí signál je roven

$$\mathbf{G}_S \cdot \mathbf{W}_2 = \frac{1}{k_S(1 + d_1 + d_2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

pro statické soustavy, kdežto pro astatické soustavy platí

$$\mathbf{G}_S \cdot \mathbf{W}_2 = \frac{1}{k_S T(1 + d_1 + d_2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Pro maximum odezvy platí

$$x_1(r) = \frac{1}{k_S(1 + d_1 + d_2)} [f_1(r) + f_0(r)(1 + d_2)] \quad (48)$$

u statických soustav.

$$x_1(r) = \frac{1}{k_S T(1 + d_1 + d_2)} [f_1(r) + f_0(r)d_2] \quad (49)$$

u astatických soustav. Protože v čase t_r nastává maximum odezvy, musí dale platit

$$\frac{dx_1(m)}{dm} = 0 \quad \text{pro } m = r \quad (50)$$

Z rovnice (50) a (49), propř. (48), vypočítáme d_1 a d_2 . Postup výpočtu osvětlí následující příklad.

Příklad

Pro regulační ohvod se soustavou, která má spojity píenos

$$F_S(p) = \frac{1}{(5p + 1)(p + 1)}$$

a periodu vznikování $T = 5$ s, pečadluje maximální překmit 10% v čase $t_r = 7$ s. Diskrétní přenos soustavy s tyarovacem je ve tvaru

$$F_C(z; m) = \frac{-p_1 z^2 + p_1 z + p_0}{q_2 z^2 + q_1 z + q_0}$$

Hodnoty koeficientů p_k , q_k jsou uvedeny v příkladu na str. 107. Pro první dva členy maticy $F_C(z)$ platí

$$f_0(m) := \frac{p_2(m)}{q_2} = 1 - 1,125 e^{-m} + 0,25 e^{-5m}$$

$$f_1(m) = p_1(m) - p_2(m) q_1 = 0,7902 e^{-m} + 0,2483 e^{-5m}$$

Přenos sériového regulačního je

$$D_S(z) = \frac{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}{1 + d_1 + d_2}$$

Maximální překmit určuje hodnotu regulačního veličiny v čase $t_r = 5(1 + 0,4) = 7$ s, $x_1(0,4) := 1,1$. Rovnici (48) a (50) jsou

$$\begin{aligned} x_1(0,4) &= \frac{1}{1 + d_1 + d_2} 0,7902 e^{-m} + 0,2483 e^{-5m} + \\ &+ (1 - 1,125 e^{-m} + 0,25 e^{-5m})(1 + d_1) - 0,7902 e^{-0,4} - 1,2415 e^{-2} + \\ &+ 1,25(e^{-0,4} - e^{-2})(1 + d_1) = 0 \end{aligned}$$

Vypočítané hodnoty jsou $d_1 = -0,4826$, $d_2 = 0,0282$. Velikosti akčních zásahů stanovíme ze vztahu

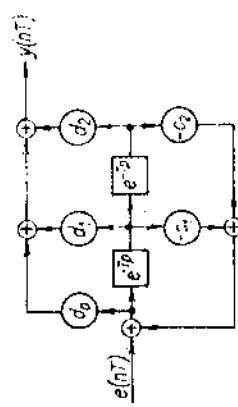
$$Y_2 := \mathbf{D}_S \cdot \mathbf{W}_2 = \frac{1}{1 + d_1 + d_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 + d_1 \\ 1 + d_1 + d_2 & 1 + d_1 + d_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$y_2(0) = 1,8328$, $y_2(T) = 0,9483$, $y_2(2T) = 1$, $y_2(3T) = 1$... Regulační pochod je tedy konečný, i když regulační veličina nemá monotoný průběh. Přenos skutečného regulačního výpočtu podle díve odvozeného vztahu

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{D_S(z)}{1 - D_S(z) F_C(z)} = \\ &= \frac{1 - 0,8572 z^{-1} + 0,2115 z^{-2} - 0,0118 z^{-3}}{0,5456 - 0,7462 z^{-1} + 0,1768 z^{-2} + 0,0263 z^{-3} + 0,0025 z^{-4}} \end{aligned}$$

NÁVRH ŘÍDICÍHO ALGORITMU S OMEZENÝM POČTEM ČLENŮ REGULÁTOŘE TYPU P, S, PS, PD A PSD

Přenosové funkce řídicího členu, vypočítané na základě požadavků na dynamické i statické vlastnosti regulátoru, mohou být známě složité. Ve skutečném provozu však malokrátým hýváním dosaženo přesného souhlasu mezi požadovaným a počítacím průběhem regulátoru daje. Matematický model soustavy, se kterým návrhu pracuje, neodpovídá většinou naprostu nejjednodušší skutečným vlastnostem



Obr. 70. Schéma algoritmu řízení pro řádu s dopravním zpožděním.

stavy a je jen jejich approximaci. Nacháktá se pak otázka, zda velmi složitý a na výkon a na kapacitu paměti naročný řídicí algoritmus je výhodný. Často vystačíme se jednodušším tvarem přenosu $D(z)$, anž dojde k podstatnému zhoršení kvality řídicího děje. Pro návrh regulátoru s omezeným počtem projektu použijeme základní pouze tři různé metody. Liší se tím, na kterém stupni projektu použijeme approximace.

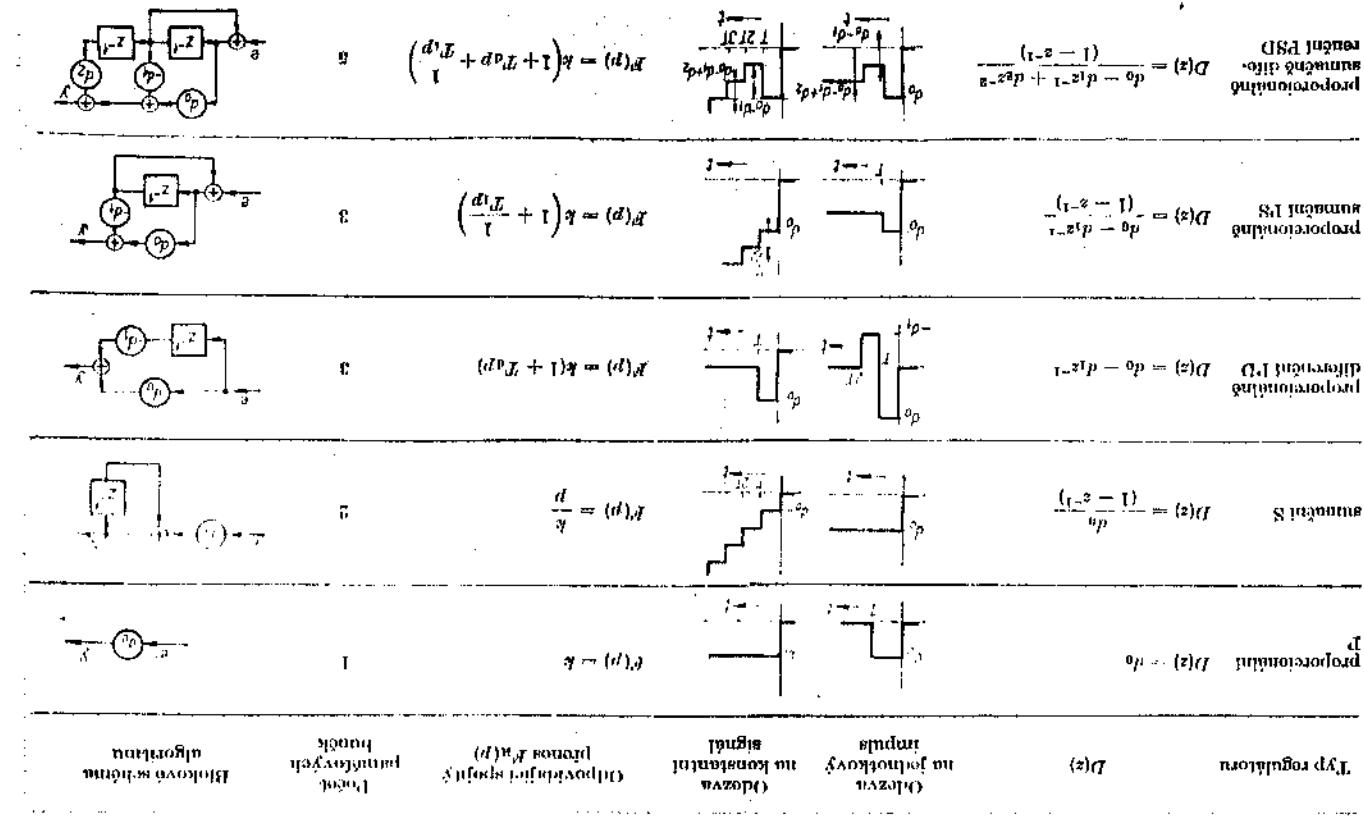
a) Přenos regulované soustavy nahradíme přenosem nejrůžnějším druhem řádu, nebo prvního řádu s dopravním zpožděním. Při běžných zadání (např. podle odstavce 17 nebo 18 této kapitoly) vypočítaný přenos řídicího členu je ve tvaru

$$D(z) = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}$$

kórové schéma algoritmu, který realizuje tento řídící člen, je na obr. 70. Pro výpočet ohaničit hodnoty akční veličiny je třeba pěti násobení a čtyři součtu. V paměti je obsazeno 7 buněk. Tento postup dává poměrně velmi dobré výsledky, záleží však hlavně na použité approximační metodě.

b) Přenos řídicího členu navrhne podle skutečného přenosu uvedené soustavy a zadaných požadavků. Vypočítaný přenos $D(z)$ pak radíme jednodušším typem, který svými vlastnostmi odpovídá spojitému regulátoru typu P, I, PI, PD nebo PID. V tab. 7 jsou uvedeny jednotlivé typy těchto jednoduchých regulátorů, jejich přenosové funkce, odezvy na jeden impuls i na stacionární vstupní signál, odpovídající typy přenosu spojitéch regulačních bloků a žádoucí programová a počet paměťových buněk, nutných k realizaci daného algoritmu.

Provedenou approximaci je vžák nutné vždy kontrolovat výpočtem přenosu užitých smyček.



Příklad

Pro soustavu s přenosem

$$F_S(p) = \frac{1}{(5p+1)(p+1)}$$

a periodu vzorkování $T = 5$ s jsme v předchozích odstavech navrhli tři různé algoritmy řízení:

a) pro přechodný děj konečný jen v časech vzorkování

$$D_1(z) = \frac{1.8457 - 0.6914z^{-1} + 0.0046z^{-2}}{1 - 0.8411z^{-1} - 0.1589z^{-2}}$$

b) pro konečný počet regulačních kroků (děj konečný i mimo časy vzorkování)

$$D_2(z) = \frac{1.5926 - 0.5966z^{-1} + 0.0040z^{-2}}{1 - 0.8629z^{-1} - 0.1371z^{-2}}$$

c) pro žádanou dobu navrstívání a maximální překmit

$$D_3(z) = \frac{1 - 0.8572z^{-1} + 0.2115z^{-2} - 0.0118z^{-3}}{0.5456 - 0.7162z^{-1} + 0.1768z^{-2} + 0.0263z^{-3} - 0.0025z^{-4}}$$

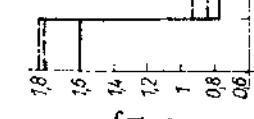
Z obr. 71, kde jsou nakresleny impulsové odezvy všech tří navržených regulačních algoritmů, vyplývá, že rozdíly jsou velmi malé. Zvolíme-li regulační typu PS (proporcionálně – sumační), jeho přenos bude:

$$P(z) = \frac{1.7 - 0.75z^{-1}}{(1 - z^{-1})}$$

Obraz odězvy uzavřeného obvodu na skok řízení je:

$$X(z) = \frac{0.9211z^{-1} - 0.2160z^{-2} + 0.0646z^{-3}}{1 - 1.4535z^{-1} + 0.5701z^{-2} - 0.1842z^{-3} + 0.0671z^{-4}}$$

Casový průběh odězvy je nakreslen na obr. 72.



Obr. 72. Odězva na zmenu řízení v obvodu s regulačním algoritmem typu PS a soustavou druhého řidiče.

Pomocí těchto jednoduchých regulačních pochodů než při použití algoritmu s neomezenou přenosovou funkcí, V případě soustav různých požadavků na řízení je možné jednoduchým regulačním algoritmem dosáhnout mnohem menší kvality regulačních pochodů než při použití algoritmu s neomezenou přenosovou funkcí. V případě soustav různých řidičů nebo zvýšených požadavků na regulační vlastnosti není možné jednoduchým regulačním algoritrem typu PSD dané prázdary splnit.

Příklad

V odstavci 17d této kapitoly jsme řešili návrh algoritmu pro soustavu s přenosem

$$F_S(p) = \frac{1}{p(20p + 1)^2}$$

při požadavcích nulové ustálené odchylky pro lineárně navrstíjecí řídicí signál $re(z) = t$ a konečný regulační děj. Navržený regulační algoritmus PSD. Pokud se společně s nulovou odchylkou pouze při konstantním řízení, lze přenosovou funkce mít tvar

$$F_R(z) = 0.2092z^{-1} + 0.6611z^{-2} + 0.1297z^{-3}$$

Diskrétní přenos soustavy s tvarovacím multich řidičem je:

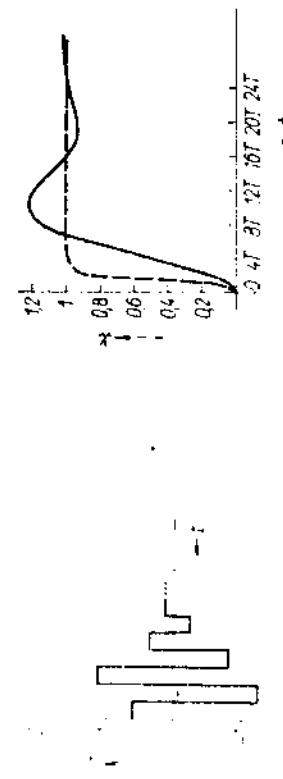
$$F_C(z) = 0.324 \frac{(1 + 2.95z^{-1})(1 + 0.21z^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0.607z^{-1})^2}$$

a přenos číslicového regulačního je

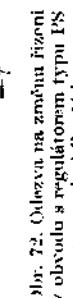
$$D(z) = \frac{0.6457 - 0.7839z^{-1} + 0.2379z^{-2}}{1 + 0.7908z^{-1} + 0.1297z^{-2}}$$

Odězva regulačního impulsu je na obr. 73. Tento přenos opět nelze approximovat regulačním jednoduchým typu. Nejvhodnější jednoduchý regulační algoritmus je typu PD. Kritické zesilení regulačního transformace napi. pomocí bilineární transformace a Hurwitzova kriteria. Jeho hodnota je $d_0 = 0.0685$. Vhodný přenos typu PD je

$$P_2(z) = 0.07 - 0.04z^{-1}$$



Obr. 73. Impulsová odězva regulačního impulsu pro soustavu III. řidiče.



Obr. 74. Strovní odězvy regulačního impulsu s připojeným nevýznamným regulačním funkcionálem křivkou a jeho PD approximací (příslušnou křivku).

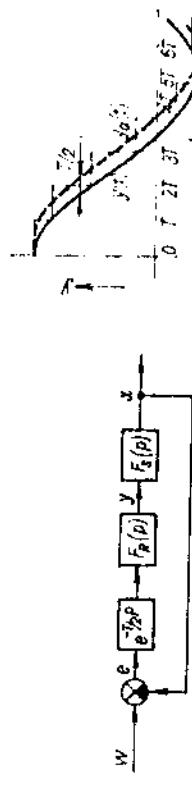
Přenos řízení pak je

$$F_R(z) = \frac{0.0227z^{-1} + 0.0587z^{-2} - 0.0269z^{-3} - 0.008z^{-4}}{1 - 2.1913z^{-1} + 1.6411z^{-2} - 0.3953z^{-3} - 0.008z^{-4}}$$

Časový průběh odězvy na jehodnotkovou změnu řízení je nakreslen na obr. 74, kde je pro strovní těž navedena odězva systému, je-li zapojen přenos $D_1(z)$.

c) Jsou-li časové konstanty regulované soustavy znáčené větší než říjeda vzorkování, můžeme navrhnut různý spojitý regulátor a přenos diskrétního řídícího členu $D(z)$ zvolut tak, aby se jejich přechodové charakteristiky co více přiblížovaly.

Spojitý regulátor navrhujeme pro soustavu s přenosem $F_S(p)$ a vzorkovací tvarovačem nahradijm členem typu dopravního zpoždění o velikosti $T/2$.



Obr. 75. Blokové schéma náhrady vzorkovace tvarovače článkem s dopravním zpožděním

vzorkové schéma je na obr. 75. Tato náhrada vychází ze skutečnosti, že vzorkovaný signál akční veličiny je vyhlazen velkými časovými konstantami v souvislosti s výslednou odzvou, je přibližně rovna odzvě na signál, který je střední hodnotou pravobokých akčních impulsů (obr. 76). Tento signál $y_S(t)$ je proti původnímu posunut o polovinu periody vzorkování.

Příklad

Máme navrhnut řídicí algoritmus pro soustavu se spojitým přenosem

$$F_S(p) = \frac{1}{(5p + 1)(p + 1)}$$

periodou vzorkování $T = 1$ s. Vhodný spojitý regulátor typu PI má přenos

$$F_E(p) = 0,5 \frac{5p + 1}{p} = 2,5 \left(1 + \frac{1}{5p} \right)$$

tohoto přenosu můžeme vypočítat některou z metod z teorie lineární spojité algebre. Má-li spojitý přenos tvar

$$F_E(p) = k \left(1 + \frac{1}{T_1 p} \right)$$

dopovídající diskrétní přenos

$$D(z) = \frac{d_0 - d_1 z^{-1}}{(1 - z^{-1})}$$

$d_0 = k \left(1 + \frac{1}{T_1} \right)$ a $d_1 = k$. Po dosazení dostaneme

$$D(z) = \frac{3 - 2,5z^{-1}}{(1 - z^{-1})}$$

Diskrétní přenos soustavy s tvarovačem je

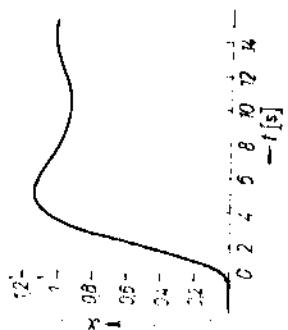
$$F_C(z) = \frac{0,0686z^{-1} + 0,0460z^{-2}}{1 - 1,1866z^{-1} + 0,3011z^{-2}}$$

a celková přenosová funkce řízení při použití regulátoru $D(z)$ bude

$$F_T(z) = \frac{0,2058z^{-1} - 0,0335z^{-2} - 0,1150z^{-3}}{1 - 1,9308z^{-1} + 1,4542z^{-2} - 0,4161z^{-3}}$$



Obr. 76. Grafické znázornění průběhu v obvodu podle obr. 75



Obr. 77. Průběh odzvou v obvodu s náhradou navrženého spojitého PI regulátoru regulačním typu PS

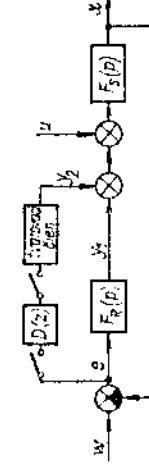
Příběh odzvou na jednotkový šok řízení je nakreslen na obr. 77. Regulátor navržený podle požadavku konečného přechodného děje by měl přenos

$$\bar{D}(z) = \frac{8,726 - 10,354z^{-1} + 2,6274z^{-2}}{1 - 0,5986z^{-1} - 0,4014z^{-2}}$$

Pro strovnání jsou na obr. 78 nakresleny impulsové odzvy obou regulátorů.

22. HYBRIDNÍ OBVODY

Dosud jsme předpokládali, že v regulačním obvodu je zapojen pouze regulátor realizovaný číslicovým počítačem (obr. 54 nebo 66). Číslicový počítač je vzhledem



ke své složitosti a počtu pozitivních sonátek mnohem poruchovější než klasický analogový regulátor. V důležitých provozech jsou proto řídící počítače (nebo ale spolu některé jejich nejdůležitější části) zdvojovány. Převzali v důsledku pouze hlavní jednotku svou činnost, systém automaticky zapojí jednotku záložní. Přes tato opatření by však mohlo dojít k situaci, kdy by soustava zůstala bez řízení.

Takový stav nelze připustit zvláště u objektů s rychlou reakcí (pohony, turbíny apod.). V těchto případech zapojujeme do obvodu pomocný analogový regulátor, který v případě poruchy počítá za zakříštní havarijnímu stavu. Je samozřejmě, že samotné působení tohoto regulátoru nemůže zajistit požadavky, kladené na statické i dynamické vlastnosti obvodu. Číslicový regulátor pak připojujeme obvykle paralelně k analogovému regulátoru. Blokové schéma tohoto hybridního obvodu je na obr. 79. Regulační odchylka $e(t)$ vstupuje do analogového regulačního s přenosem $F_R(p)$ a po vztokování i do číslicového regulátoru s přenosem $F_{Tr}(p)Y_1(t)$ se sčítá s funkcií $y_2(t)$, což je tvarovaná výstupní veličina číslicového korekčního člena. K celkové aktuální veličině se přidává poruchový signál $u(t)$. Přenosy uzavřeného obvodu odvodíme pomocí známých pravidel blokové algebry

$$\begin{aligned} X(p) &= F_S(p) [Y_1(p) + Y_2(p)] \\ Y_1(p) &= F_R(p) F(p) = F_R(p) [W(p) - X(p)] \\ Y_2(p) &= F_{Tr}(p) D^*(p) E^*(p) = F_{Tr}(p) D^*(p) (W^*(p) - X^*(p)) \end{aligned} \quad (51)$$

Z téhoto rovnice vypočítáme obraz odezvy na řídící signál

$$X(p) = \frac{F_S(p) F_R(p) W(p)}{1 + F_S(p) F_R(p)} + \frac{F_S(p) F_{Tr}(p)}{1 + F_S(p) F_R(p)} D^*(p) (W^*(p) - X^*(p)) \quad (51)$$

Přenos uzavřené smyčky s analogovým regulátorem označíme $G(p)$

$$G(p) = \frac{F_S(p) F_R(p)}{1 + F_S(p) F_R(p)}$$

a dále zavedeme značení

$$H(p) = \frac{F_{Tr}(p)}{F_R(p)} G(p)$$

Rovnice (51) má pak tvar

$$X(p) = G(p) W(p) + H(p) D^*(p) [W^*(p) - X^*(p)]$$

Tuto rovnici nyní podrobně modifikované transformaci \mathcal{Z}

$$X(z; m) = G W(z; m) + H(z; m) D(z) [W(z) - X(z)]$$

odkud úpravou dostaneme

$$X(z) = \frac{G W(z) + W(z)}{1 + H(z) D(z)} H(z) D(z)$$

Pro $m = 0$ se rovnice (52) zjednoduší na tvar

$$X(z) = \frac{G W(z) + W(z)}{1 + H(z) D(z)} H(z) D(z) \quad (52)$$

Přenos řízení je u tohoto obvodu závislý na tvaru řídího signálu

$$F_W(z; m) = \frac{X(z; m)}{W(z)} = \frac{1}{W(z)} \left[G W(z; m) + H(z; m) \frac{W(z) - G W(z)}{1 + H(z) D(z)} \right] \quad (53)$$

Podobné odvozidlo i přenos poruchy $F_U(z; m)$

$$X(p) = F_S(p) [U(p) - F_R(p) X(p) - F_{Tr}(p) D^*(p) X^*(p)]$$

oklad s použitím přenosů $G(p)$ a $H(p)$ dostaneme

$$X(p) = \frac{G(p) U(p)}{F_R(p)} - H(p) D^*(p) X^*(p)$$

Převedením této rovnice do transformace \mathcal{Z} získáme diskrétní obraz regulované veličiny

$$X(z; m) = F_R^{-1} G I'(z; m) - H(z; m) D(z) \frac{F_R^{-1} G U(z)}{1 + H(z) D(z)} \quad (54)$$

Pro nemodifikovanou transformaci $m = 0$ platí

$$X(z) = \frac{F_R^{-1} G U(z)}{1 + H(z) D(z)}$$

a přenos poruchy je rovněž funkcií tvaru poruchového signálu $u(t)$

$$F_U(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1}{U(z)} \frac{F_R^{-1} G U(z)}{1 + H(z) D(z)} \quad (55)$$

Přenos číslicového regulátoru navrhujeme obvykle opět podle požadovaného přenosu řízení jeho poruchy. Jsou-li stanoveny tyto přenosy, algoritmus $D(z)$ vypočítáme z rovnice (53) nebo (55). Všechny podmínkové rovnice, které jsou formulovány v odstavcích 17 a 18 této kapitoly, zůstávají v platnosti.

Příklad

Regulovaná soustava má přenos

$$F_S(p) = \frac{1}{(5p + 1)(p + 1)}$$

Poříada vztokorování je $T = 5$ s a používá analogový regulátor je proporcionalní. Číslicový regulátor má být navržen tak, aby přechodný dej při skokovém proměnném řídiči veličině byl konečný a ustálená odchylka byla rovna nule. Nejdříve určíme vhodné zesilení analogového regulátoru. Pro uzavřený obvod s analogovým regulátorem platí

$$G(p) = \frac{F_R(p) R_S(p)}{1 + F_R(p) F_S(p)} = \frac{k}{5p^2 + 6p + (1 + k)}$$

Zvolíme takové zesilení k , abý obvod byl na mezi aperiodicitu. Slovnánum s přenosem konkrétněho článku

$$a = \frac{6 \cdot 0,5}{1 + k} \cdot \sqrt{\frac{1 + k}{5 + k}} = 1$$

u kterého pro mez aperiodicity je poměrné tlumení $a = 1$, dostaneme

$$a = \frac{6}{1 + k} \cdot \sqrt{\frac{1 + k}{5 + k}} = 1$$

odkud

$$k = \frac{9}{5} - 1 = 0,8$$

a tedy

$$G(p) = \frac{0,444}{(1,67p + 1)^2}$$

Přenos $D(z)$ vypočítáme z rovnice (53)

$$D(z) = \frac{1}{H(z)} \cdot \frac{GW(z) W^{-1}(z) - F_W(z)}{F_W(z) - 1}$$

Tvar přenosové funkce řízení $F_W(z)$ určíme z podmínky konečného přechodného deje, což v tomto případě znamená, že funkce $F_W(z)$ musí obsahovat všechny nuly číselného pravého strany rovnice (53). Řízení předpokládáme proměnné skukem a diskrétní přenos $GW(z)$ je

$$GW(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{0,444}{p(1,67p + 1)^2} \right\}_{T=5s} = 0,444 \frac{0,8z^{-1} + 0,1025z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,05z^{-1})^2}$$

a pro přenos $H(z)$ platí

$$H(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-Tz}}{p} \cdot \frac{0,555}{(1,67p + 1)^2} \right\} = 0,556 \frac{0,8z^{-1} + 0,1025z^{-2}}{(1 - 0,05z^{-1})^2}$$

Součtemusť být splněna podmínka ulové ustálensé odchyly

$$1 - F_W(z) = (1 - z^{-1}) N(z)$$

takže přenosová funkce řízení má tvar

$$F_W(z) = \frac{0,8z^{-1} + 0,1025z^{-2}}{0,9025} = 0,8865z^{-1} + 0,1135z^{-2}$$

Dosažením těchto vztahů do rovnice pro $L(z)$ vyplníme

$$D(z) = \frac{1,195 - 0,2005z^{-1} + 0,0055z^{-2}}{1 - 0,8865z^{-1} - 0,1135z^{-2}}$$

Správnost výpočtu miříme kontrolouv např. výpočtem ustálene hodnoty akční veličiny $y_2(\infty)$. Víme, že diskrétní obraz odchyly je

$$E(z) = 1 + 0,1135z^{-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_2(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z) D(z) = 1$$

Prostym dosazením se přesvědčíme, že tento požadavek je splněn. Je však třeba mit na paměti, že odvozený tvar přenosu $F_W(z)$ platí jen pro skokově proměnný řídicí signál.

Odobobným způsobem navrheme řídicí algoritmus i pro podmítku nulové odchyly $u(t)$. Z rovnice (55) je zřejmé, že přenos poruchy $F_U(z; m)$ musí obsahovat všechny nuly výrazu $F_K^{-1}GU(z; m)$ a dále

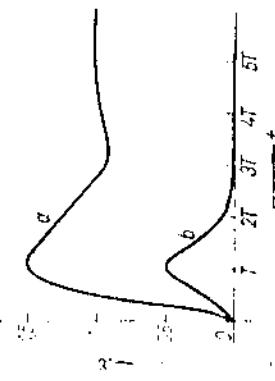
$$F_U(z) = (1 - z^{-1}) P(z)$$

Protože

$$F_K^{-1}GU(z) = 0,555 \frac{0,8z^{-1} + 0,1025z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,05z^{-1})}$$

bude přenos $F_U(z)$ ve tvaru

$$F_U(z) = 0,555(0,8z^{-1} + 0,1025z^{-2})(1 - z^{-1}) = 0,444z^{-1} - 0,3871z^{-2} - 0,0563z^{-3}$$



Obr. 80. Průběhy odzvu na řídicí (a)
a poruchový (b) signál v hybridním
obvodu

Z rovnice (55) vypočítáme $D(z)$

$$D(z) = \frac{1}{F_U(z) H(z) U(z)} [F_K^{-1}GU(z) - 1] = \frac{2,470 - 0,2222z^{-1} + 0,006z^{-2}}{1 - 0,875z^{-1} - 0,125z^{-2}}$$

Dosadime-li tento přenos do rovnice (53), dostaneme výraz pro přenos řízení (při skokové změně řízení)

$$F_W(z) = \frac{1,4618z^{-1} - 0,0237z^{-2} - 0,0943z^{-3} - 0,0054z^{-4}}{1 + 0,1316z^{-1} + 0,2066z^{-2} + 0,0002z^{-3}}$$

Časový průběh odzvu na jednotkový skok řízení je na obr. 80.

23. MNOHOROZMĚROVÉ OBVODY

Při návrhu řídicích algoritmů pro mnohorozměrové obvody zjištárají v Platinové rámci rychlý postup, uvedené v předešlých odstavcích. Nicm u této obvodu vznikají další požadavky, které můžeme splnit dílčím rozšířením polynomu přenosových funkcí. Zde uvedeme požadavky autonomnosti a invariantnosti u mnohorozměrových systémů.

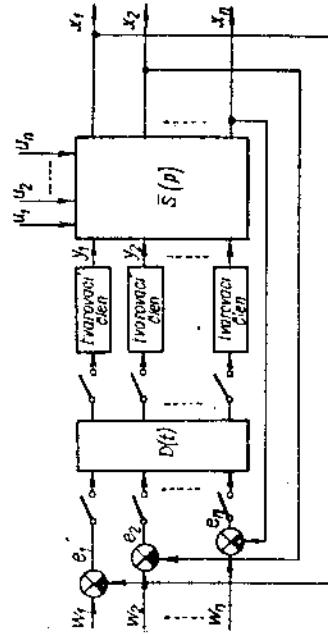
Na regulovanou soustavu s n výstupními veličinami (x_1, x_2, \dots, x_n) phisi n akčních veličin (y_1, y_2, \dots, y_n) a stejný počet poruchových veličin (z_1, z_2, \dots, z_n) . Předpoklad stejného počtu vstupních, výstupních i poruchových veličin nešlo úplnou obecností, neboť skutečný počet veličin lze rád doplňit na potřebné číslo pomocí trvale nulových proměnných. Pro vžijemné přenosy jednotlivých veličin zavedeme značení

$$S(z)_{ij} = \frac{X_i}{Y_j}; \quad R_{ij} = \frac{X_i}{U_j}$$

Protože všechny akční veličiny (vstupy řídícího počítacího jednotky) jsou tvarovány, budeme předpokládat, že platí symbolika

$$S_{ij}(z,m) = \mathcal{Z}_m\{S_{ij}(p) F_{\text{TV}}(p)\}$$

$$R_{ij}(z,m) = \mathcal{Z}_m\{R_{ij}(p) U_i(p)\} - \bar{U}$$



Okta 81 Bicknell's ravine 20

Vidíme, že přenosy R_{ij} budou opět funkčním tvaru poruchového signálu $u(t)$. Podle obr. 81, na kterém je nakresleno obecné schéma mechatronického obvodu "člověk - počítač", je možné využít funkčního diagramu pro popis funkce R_{ij} .

$$\begin{aligned} X_1 &= S_{11}Y_1 + S_{12}Y_2 + \dots + S_{1n}Y_n + R_{11}U_1 + R_{12}U_2 + \dots + R_{1n}U_n \\ X_2 &= S_{21}Y_1 + S_{22}Y_2 + \dots + S_{2n}Y_n + R_{21}U_1 + R_{22}U_2 + \dots + R_{2n}U_n \\ &\vdots && \vdots && \vdots \\ X_n &= S_{n1}Y_1 + S_{n2}Y_2 + \dots + S_{nn}Y_n + R_{n1}U_1 + R_{n2}U_2 + \dots + R_{nn}U_n \end{aligned}$$

Pro jednodušení zápisu jsou vyneschány symboly obrazové proměnné z.

členů platí

$$\frac{Y_i(z)}{Y_i(0)} = \frac{Y_i(z)}{Y_i(0)}$$

Zatím celý soubor řídicích charakteristik je využit v rámci nového

$$\begin{array}{l} Y_1 = D_{11}E_1 + D_{12}E_2 + \dots + D_{1n}E_n \\ Y_2 = D_{21}E_1 + D_{22}E_2 + \dots + D_{2n}E_n \\ \vdots \end{array}$$

Kápis soustav rovnic pro X_a i Y_a zjednodušíme, použijeme-li maticového počtu. Říkáme, že řešenou soustavou rovnic pro X_a i Y_a vytvoříme kvadratickou matici S_{ij} i R_{ij} , když máme řešenou soustavu rovnic pro X_a i Y_a .

Matice přenosových funkcí řízení bude

$$F_{tr} = (1 + SD)^{-1} SD \quad (56)$$

a matice prenosu paruch

(c) $\lambda = 100$

Systém je *autonomní* tehdy, jestžíže změna i -té řídící veličiny ovlivní pouze i -tu výstupní veličinu, kdežto na ostatních se tato změna neprojeví. Je-li totiž splňováno pouze v ustáleném stavu, že systém statický autonomní. Je-li nezávislost zajištěna i během pohybového děje, míváme o dynamické autonomnosti. Jak výplývá z rovnice (56), systém bude autonomní, když platí $F_{Wijz}(z; m) = 0$ pro všechna $i \neq j$. To znamená, že matice přenosů $F_{Wijz}(z; m)$ musí být diagonální

$$\mathbf{F}_W = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & F_{nn} \end{bmatrix}$$

Jak ukazuje rovnice (56), ve vzorce pro matici přenosových funkcí se na dvou místech vyskytuje součin matic \mathbf{SD} . Součet jednotkové matice s maticí diagonální součin dvou diagonálních matic a stejně tak inverzní matice k diagonální matici jsou opět diagonální maticy. Postačující podmínku autonomnosti systému proto bude, aby součin matice \mathbf{SD} byl diagonální maticí. To je splněno tehdy, jsou-li prvky matice \mathbf{D} algebraickými slopiškami transponované matice \mathbf{S}^T . Tato podmínka ovšem neurčuje pravky D_{ij} jednoznačně, neboť každý sloupec matice \mathbf{D} lze násobit libovolnou funkci, pro každý sloupec jinou. Tímto způsobem je možné respektovat dřívější formulované podmínky (množství ustálenu odtoky, konečný počet kroků re-
mílace atd.).

Postačující podmínka statické autonomnosti je

$$\sum_{n=0}^s f_{ij}(nT) = \lim_{T \rightarrow 0} F_{Wij}(z) = 0$$

Díly všechna i

Druhá univerzita vlastnost invariante obvodu – *invariantnost* – je charakterizovaná nezávislostí výstupních voličín $x_1(t)$ na poruchách $u_2(t)$. Stupeň nezávislosti může být různý a podle toho rozlišujeme několik druhů invariantských obvodů. V tomto se může na myslí nezávislost v ustálém stavu, nebo dynamická invariантnost (nezávislosti i během přechodného děje), není v obvodech s uspořádáním podle obr. 81 realizovatelná.

$$\lim F_{\Gamma_n}(z) = 0$$

b) Selektivní invariantní funkce. V tomto případě jsou pouze některé regulované veličiny nezávislé na některých proměných. Je-li např. veličina $x_2(t)$ v nastaveném stavu nezávislá na novému vstupu $x_1(t)$, můžeme psát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\alpha_n}(x) = 0$$

卷之三

Přenosy funkčních elektr. $J_{ij}(t)$ vypočítáme z Roylees (5/).

Příklad

Dvouzměrová soustava je popsána těmito vzájemnými přenosy

$$S_{11}(p) = \frac{X_1(p)}{Y_1(p)} = \frac{1}{(5p+1)(p+1)}$$

$$S_{12}(p) = \frac{X_1(p)}{Y_2(p)} = \frac{0.5}{(5p+1)}$$

$$S_{21}(p) = \frac{X_2(p)}{Y_1(p)} = -\frac{0.1}{p}$$

$$S_{22}(p) = \frac{X_2(p)}{Y_2(p)} = \frac{1}{p}$$

Perioda vznorkování je $T = 5$ s. Požadujeme, aby systém byl autonomní v ustáleném stavu i v okamžicích vznorkování. Přechodné děje při skokové změně řízení mají být konečné, bez oscilací mezi časy vznorkování.

Přenosové funkce řízení musí splňovat tyto podmínky

$$F_{W11}(z) = \frac{P_{11}(z)}{\sum_{i=1}^n p_{11}}$$

kde $P_{11}(z)$ je polynom v čitateli $S_{11}(z)$ ve tvaru

$$P_{11}(z) = p_{11}z^{-1} + ^2p_{11}z^{-2} + \dots + ^np_{11}z^{-n}$$

$$F_{W22}(z) = \frac{P_{22}(z)}{\sum_{i=1}^n p_{22}}$$

kde $P_{22}(z)$ je polynom v čitateli $S_{22}(z)$ ve tvaru

$$P_{22}(z) = p_{11}z^{-1} + ^2p_{12}z^{-2} + \dots + ^mp_{22}z^{-m}$$

$$F_{W21}(z) = F_{W12}(z) = 0$$

Přenosová matici soustavy má tvar

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{0.5418z^{-1} + 0.0861z^{-2}}{1 - 0.3746z^{-1} + 0.0025z^{-2}} & \frac{-0.316z^{-1}}{1 - 0.368z^{-1}} \\ \frac{0.5z^{-1}}{1 - z^{-1}} & \frac{5z^{-1}}{1 - z^{-1}} \end{bmatrix}$$

a požadovaná matici přenosu řízení

$$\mathbf{F}_W = \begin{bmatrix} \frac{0.5418z^{-1} + 0.0861z^{-2}}{0.6279} & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$$

Pro matice přenosových funkcí řídicího počítače platí

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{F}_W)^{-1} \mathbf{F}_W$$

a matici na pravé straně této rovnice jsou definovány takto

$$\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}} \begin{bmatrix} S_{22} & -S_{12} \\ -S_{21} & S_{11} \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{F}_W)^{-1} \mathbf{F}_W = \begin{bmatrix} \frac{F_{W11}}{1 - F_{W11}} & 0 \\ 0 & \frac{F_{W22}}{1 - F_{W22}} \end{bmatrix}$$

Po dosazení dostaneme

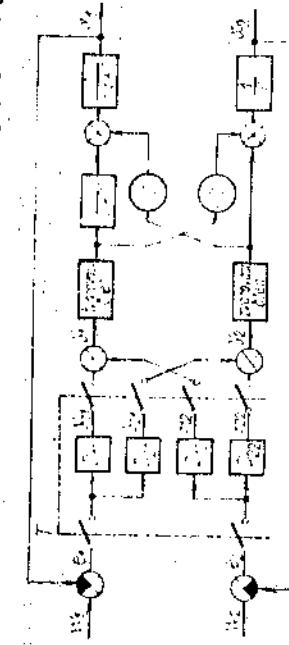
$$\mathbf{D} = \frac{1}{S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}} \begin{bmatrix} \frac{S_{22}F_{W11}}{1 - F_{W11}} & \frac{S_{12}F_{W22}}{1 - F_{W22}} \\ -\frac{S_{21}F_{W11}}{1 - F_{W11}} & \frac{S_{11}F_{W22}}{1 - F_{W22}} \end{bmatrix}$$

Z této rovnice vypočítáme jednotlivé prvky matice \mathbf{D} , tj. délky přenosy čidlicových korekčních členů (obr. 82). Např. pro $D_{11}(z)$ platí

D_{11}(z) = \frac{Y_{11}(z)}{E_1(z)} = \frac{0.5418 - 0.316z^{-1} + 0.0121z^{-2} + 0.0116z^{-3} - 0.0001z^{-4}}{0.3207 - 0.3407z^{-1} - 0.0088z^{-2} + 0.0260z^{-3} + 0.0027z^{-4}}

Pro kontrolu správnosti numerického výpočtu poslouží např. ustálěné hodnoty aktuálních veličin. Z obr. 82 je zřejmé, že v ustáleném stavu musí platit (předpokládáme jednotkové hodnoty obou řídících vstupů w_1 i w_2)

$$e_1(\infty) = e_2(\infty) = 0 ; \quad y_1(\infty) - 0.5y_2(\infty) = 1 ; \quad y_2(\infty) - 0.1y_1(\infty) = 0$$



Obr. 82. Příklad dvourozdílnového regulačního obvodu

Tento rovnící vyhovuje hodnoty $y_1(\infty) = 1.0526$ a $y_2(\infty) = 0.1052$. Pro ustálenou hodnotu akční reléčiny $y_1(\infty)$ platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_1(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} [Y_{11}(z) + Y_{12}(z)](1 - z^{-1}) = \\ = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) [D_{11}(z) E_1(z) + D_{12}(z) E_2(z)]$$

Obrazy odchylkových signálů jsou (při skokových změnách řízení)

$$E_1(z) = W_1(z)[1 - F_{W11}(z)] = 1 + 0.1371z^{-1}$$

$$E_2(z) = W_2(z)[1 - F_{W22}(z)] = 1$$

Zbývá ještě určit $D_{12}(z)$. Podle předchozích výpočtů

$$D_{12}(z) = \frac{1}{S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}} \cdot \frac{S_{12}F_{W22}}{1 - F_{W22}}$$

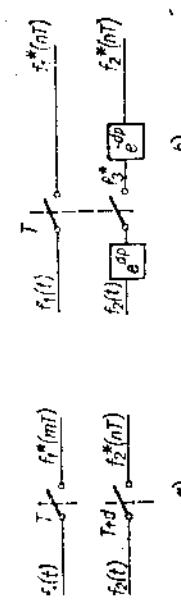
První část výrazu na pravé straně má v čitateli člen $(1 - z^{-1})$ a tento člen je obsažen tež ve jmenovateli druhé části výrazu na pravé straně. Proto přenos $D_{12}(z)$ neobsahuje sumární člen $(1 - z^{-1})$ ve jmenovateli a ve výpočtu ustálené hodnoty se proto výraz $D_{12}(z) \cdot E_2(z)$ neplatní. Bude tedy

$$y_1(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) D_{11}(z) E_1(z) = \frac{0,2491}{0,2691} \cdot 1,1371 = 1,0526$$

což odpovídá dříve vypočítané hodnotě. Stojím postupem vypočítáme hodnotu druhé akční veličiny. Jelikož v tomto příkladu platí

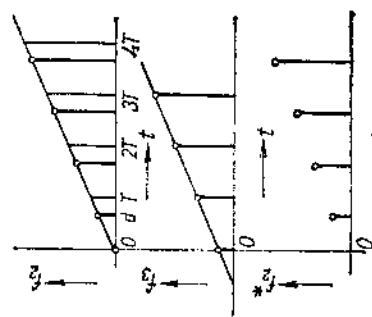
$$S_{21}(z) = -0,1S_{22}(z) \text{ a proto } D_{21}(z) = -0,1D_{11}(z)$$

je výpočet velmi jednoduchý.



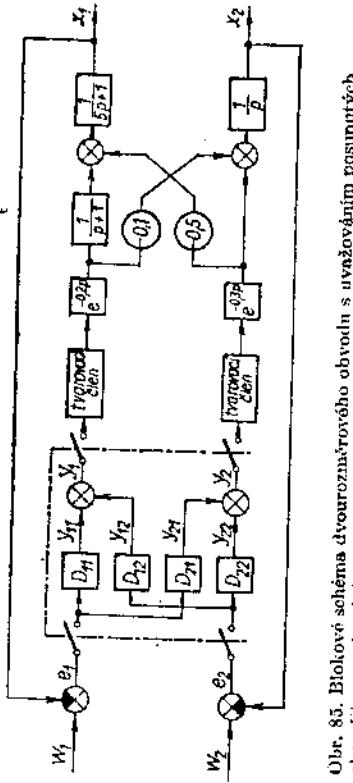
Obr. 83. Řešení posunutí okamžitku vzorkování pomocí trvalečných členů dopravního zpoždění a zrychlení

Jsou-li časové konstanty regulované soustavy malé (obvykle menší než 1 s), není možné zanedbat vliv časového posunu jednotlivých vzorkovacích členů proti sobě. Prí dnešní rychlosti číslicových počítačů je potřeba pro převod analogové informace



Obr. 84. Časový průběh funkce posle
obr. 83

kdy nelze zanedbat posunutí vzorkování v jednotlivých obvodech. Tento problém řešíme pomyslným zavedením pomocných bloků, jak ukazuje obr. 83. Funkce $f_1(t)$ je vzorkována v časech $t_n = nT$, kdežto funkce $f_2(t)$ je vzorkována v časech $t_d = (n + d)T$. Z časových perihelií na obr. 84, kde je znázorněno vzorkování lineárně narůstajícího signálu, je zřejmé, vliv obou zavedených článků. Protože tuto úpravu děláme pouze pro matematický popis, nemá záradu skutečnost, že člen s přenosem e^{dt} , tj. dopravní „zrychlení“, není realizovatelný.



Obr. 85. Blokové schéma dvojrozائزrového obvodu s uvažováním posunutých okamžisk vzorkování

Příklad

V systému podle obr. 82 probíhá vzorkovací proces takto: odchylika $e_1(t)$ v časech

odchylika $e_2(t)$ je měřena v časech

$$t_n = nT + 0,01T = nT + 50 \text{ ms}$$

nakláni veličina $y_1(t)$ je nastavována v časech

$$t_p = nT + 0,04T = nT + 200 \text{ ms}$$

akláni veličina $y_2(t)$ je nastavována v časech

$$t_q = nT + 0,06T = nT + 300 \text{ ms}$$

Blokové schéma je nutné doplnit pomýšlnými členy podle obr. 85. Změněné přenosy v matice $\mathbf{S}(z)$ vypočítáme podle vzorec uvedených v kap. III, článku 14.

o regulované veličině na číslicovém, jíž přesun a zpracování v počítači a zpětné převedení na analogovou formu (akční veličinu) doba fázové 10^{-2} s. Toto způsobení můžeme obvykle zanedbat a předpokladat, že oba vzorkovací v jednoduchém regradačním obvodu pracují synchroně. U mnohorozائزrových obvodů však už ně-

a rovnice izoklin

$$v(n) = -\frac{ce(n)}{q + b} \quad (64)$$

Tak jako ve fázové rovině spojitých obvodů i zde, jsou-li koeficienty b a c konstantní, jsou izokliny přímky procházející počátkem. Na rozdíl od fázové roviny spojitých obvodů však v příručkové fázové rovině nemá spojitá trajektorie význam, protože je $e(n)$ tak výška, se mění s tokem. Známe-li v bodě P_n směrnici spojnice s dalším bodem P_{n+1} , můžeme tento bod přímo určit, neboť změna vodorovné souřadnice $e(n+1) - e(n)$ je přímo rovna hodnotě $v(n)$, neboť platí

$$v(n) = \Delta e(n) = e(n+1) - e(n)$$

Tato závislost neplatí pouze pro počáteční bod P_0 , který leží na ose e , která podle rovnice (64) odpovídá izoklině se směrem $q \rightarrow \infty$. Vertikální souřadnice bodu P_1 však můžeme vypočítat přímo z rovnice (62). Protože $v(0) = 0$, pak

$$\Delta v(0) = -ce(0) = v(1) - v(0) = v(1). \text{ Souřadnice bodu } P_1 \text{ tedy jsou } e(1) = e(0) = v(1) = -ce(0).$$

Obr. 88. Blokový schéma obvodu řešeného v příkladu na str. 146

bodu P_1 však můžeme vypočítat přímo z rovnice (62). Protože $v(0) = 0$, pak

$$\Delta v(0) = -ce(0) = v(1) - v(0) = v(1). \text{ Souřadnice bodu } P_1 \text{ tedy jsou } e(1) = e(0) = v(1) = -ce(0).$$

Příklad

Metodou příručkové fázové roviny řešme regulařní pochod v obvodu podle obr. 88 při počátečních podmínkách $e(0) = -2$, $e'(0) = 0$. Diskrétní přenos otevřený smyčky je

$$F_0(z) = \frac{2}{p} \left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \cdot \frac{|z|_2}{p(2p+1)} \right\}_{T=1} = \frac{0.426z + 0.361}{(z-1)(z-0.6665)}$$

a charakteristická rovnice

$$z^2 - 1.1805z + 0.9675 = 0$$

Diferenční rovnice (62) má koeficienty

$$\Delta v(n) + 0.8195v(n) + 0.7870e(n) = 0$$

Rovnicí izoklin dostaneme úpravou předešlé rovnice

$$v(n) = -\frac{0.787e(n)}{q + 0.8195}$$

a směrnice q je dana rovnicí

$$q = -0.8195 - 0.7870 \frac{e(n)}{v(n)}$$

Rешení pro danou počáteční podmítku je na obr. 89. Souřadnice bodu P_1 jsou $e(1) = -2v(1) = -0.7870(-2) = 1.574$. Souřadnice v bodě P_1 je

$$q_1 = -0.8195 + 0.7870 \frac{2}{1.574} = 0.1805$$

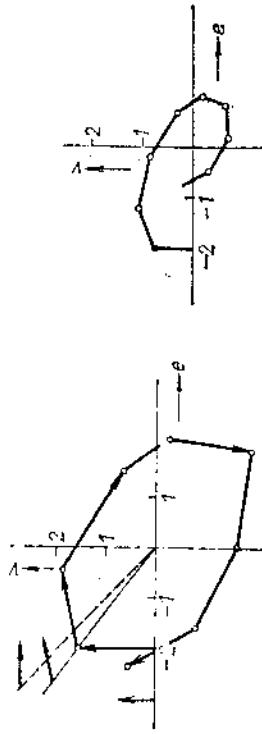
Souřadnice v dalším bodě P_2 je

$$q_2 = -0.8195 + 0.7870 \frac{0.4261}{1.6509} = -0.6164$$

Celý průběh řešení je patrný z obr. 89. Systém je zřejmě velmi blízko meze stability. Tomu odpovídá i rozložení koeficínu charakteristické rovnice

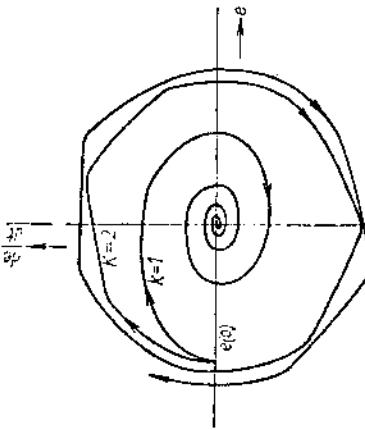
$$z_{1,2} := 0.59 \pm j0.79$$

Absolutní hodnota koeficínu je $|z_{1,2}| = 0.98$. Řešení téhož systému při polovičním ztěsnění je na obr. 90. Fázové trajektorie ve spojité fázové rovině e, e' pro obě hod-



Obr. 89. Fázová trajektorie systému, jejž blokové schéma je na obr. 88

Obr. 90. Fázová trajektorie systému s polovičním ztěsněním



Obr. 90. Fázová trajektorie systému s polovičním ztěsněním

pozici informace o čase, neboť jednotlivé body odpovídají hodnotám odchylky a její diferenční v časech vznikorovní.

Nyní lze dle řešit systém, který má v sérii s regulovanou soustavou za spojení jedinečnou člen. Blokové schéma je na obr. 92. Protože obvod obsahuje ne-lineární

člen, nelze již napsat přenosovou funkci uzavřeného obvodu. Přenos lineární části je

$$F_0(z) = \frac{X(z)}{S(z)} = \frac{K_1(z - \beta)}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)}$$

Za předpokladu, že řidící funkce je nulová, $v(t) = 0$, platí

$$E(z) = -X(z)$$

a tedy

$$F_0(z) = -\frac{E(z)}{S(z)}$$

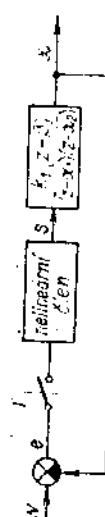
Dosazením a úpravou dostaneme rovnici

$$\Delta^2 e(n) + b \Delta e(n) + ce(n) = fs(n) + g \Delta s(n) \quad (65)$$

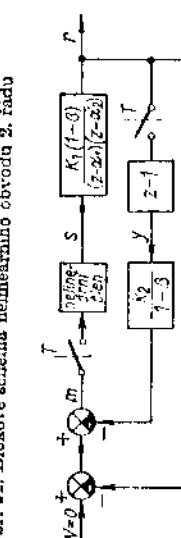
Rovnice pro směrnicí spojnice dvou bodů má nyní tvar

$$q = f \frac{s(n)}{v(n)} + g \frac{\Delta s(n)}{v(n)} - b - c \frac{e(n)}{v(n)} \quad (66)$$

Pořeze činní závislost na první differenci výstupní funkce nelineárního člena Δs . Vypočet izoklin je v tomto případě velmi obtížný. Chceme-li se této nevýhodnosti vyhnout, je třeba odstranit závislost na differenci proužné $s(n)$. Toho dosáhneme kreslením blokové schéma obvodu, který je ekvivalentní obvodu na obr. 92 za předpokladu, že $w(t) = 0$ a $K_2 = 1$. V tom případě platí $e = m$. Změníme-li konstantu K_2 , měníme různost regulačního obvodu. Tímto způsobem budeme později obvod konfigurovat tak, aby regulační díl probíhal podle požadavku.



Obr. 92. Blokové schéma nelineárního obvodu 2. řady



Obr. 93. Blokové schéma z obr. 92, upravené pro řešení v příručkové fázové rovine

Z obr. 93 je zřejmé, že přenosová funkce

$$F_0(z) = \frac{R(z)}{S(z)}$$

již neobsahuje člen $(z - \beta)$ v čítatele. Lze tedy psát

$$\Delta^2 r(n) + b \Delta r(n) + cr(n) = h_s(n) \quad (7)$$

Přenosové členy ve větví pomocné zpětné vazby jsme rozdělili na dva proto, aby chom zavedli proměnnou $y(n)$, pro kterou platí

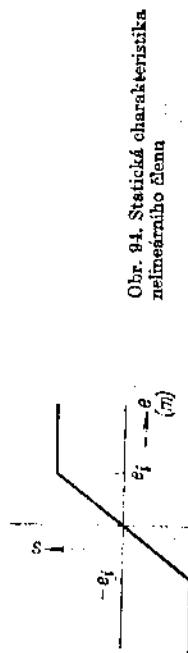
$$Y(z) = (z - 1) R(z)$$

a tedy

$$y(n) = r(n + 1) - r(n) = \Delta r(n)$$

Regulační díl by nyní budeme řešit v příručkové rovine $r(n), y(n)$. Pro směrnicí izokinu v této rovině plynne z rovnice (67) vztah

$$q = \frac{\Delta y(n)}{\Delta r(n)} = \frac{h_s(n)}{y(n)} - b - c \frac{r(n)}{y(n)} \quad (68)$$



Obr. 94. Statická charakteristika
nelineárního člena

V této rovinici se již nevyhýkaje člen $\Delta s(n)$, což bylo cílem uskutečněné transformace souřadnic r a y . Platí

$$e(n) = r(n) + \frac{1}{1 - \beta} y(n) \quad (69)$$

Předpokládejme, že nelineární člen obsahuje nasycení, jak ukazuje charakteristika na obr. 94. Tuto charakteristiku popiseme třemi rovnicemi (nahradíme ji třemi přímkovými ísekly). Hranice platnosti těchto rovnic uvedeme podmínky $e = -e_i$ a $e = e_i$. Z rovnice (69) snadno určíme transformaci těchto hranic do roviny nových souřadnic r a y . Platí

$$a) \quad -e_i = -m_i = r + \frac{1}{1 - \beta} y \quad \text{odkud} \quad y = -(e_i + r)(1 - \beta)$$

$$b) \quad e_i = m_i = r + \frac{1}{1 - \beta} y \quad \text{odkud} \quad y = (e_i - r)(1 - \beta)$$

Hranici píinký se naklonily o úhel φ , pro který platí

$$\operatorname{tg} \varphi = (1 - \beta)$$

Máli zpětnovazební konstanta K_2 jinou než jednotkovou hodnotu, platí rovnice

$$e = r + \frac{1}{1 - \beta} y$$

$$m = r + \frac{K_2}{1 - \beta} y$$

V tomto případě jsou rovnice hranicích přímek pozměněny na tvar

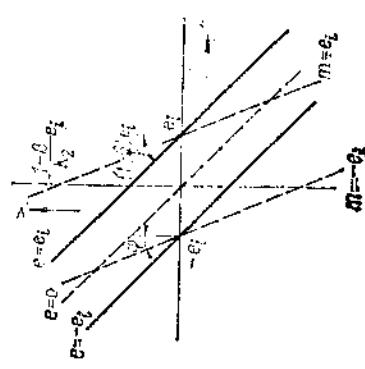
$$a) \quad y = -(m_1 + r) - \frac{1 - \beta}{K_2}$$

$$b) \quad y = (m_1 - r) - \frac{1 - \beta}{K_2}$$

Úhel sklonu hranicích přímek je nyní ψ

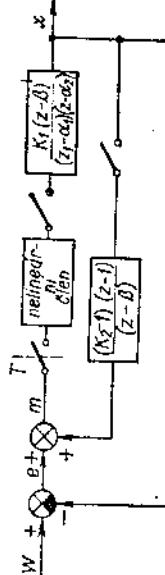
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1 - \beta}{K_2}$$

Oba případy znázorňují obr. 95 pro $K_2 < 1$. Na první pohled může překrýt skutečnost, že zvětšení konstanty K_2 způsobí otocení hranicích přímek v záporném



Obr. 95. Konstrukce hranicích přímek v příkladu nelineárního členu typu nasycení

smyšlu, kdežto změněním této konstanty dosáhneme odstílení v kladném smyslu. Porovnáme-li tento výsledek se známým vlivem zpožděního odráhu a příslušného regulačního řešeního ve spojité fázové rovině, zdá se, že zvětšení konstanty K_2 způsobí náschytnost systému ke kmitání. To odpovídá skutečnosti, jak se snadno přesvědčíme překreslením blokového schématu do původního tvaru. Z obr. 96, který je jen jinou formou obr. 93



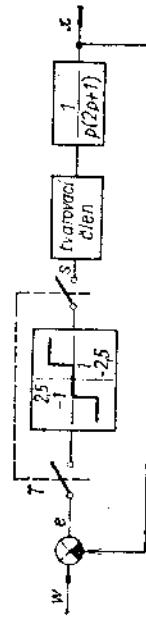
Obr. 96. Upravené blokové schéma příkladu obvodu s nasycením

vidíme, že při $K_2 < 1$, se mění záporná vazba v malé smyčce ve vazbu kladnou. Vliv změny konstanty K_2 je ostatní zjedny i u obr. 93, uváděnoumu-li si že díky členu s přenosem $(z-1)$ má zavedena zpětná vazba diferenční charakter. Popisujeme postup řešení nyní ukážeme na konkrétném příkladu regulátora s režimem charakteristikou. Tento případ je velmi častý i v obvodech s číslicovými řídícími počítací.

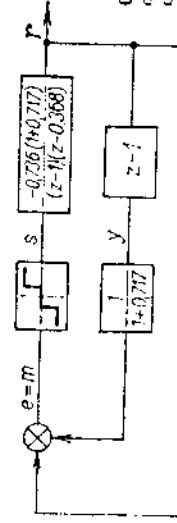
Režcové řízení je nejjednodušší formou přímého číslicového řízení. V takovém případě je známo zjednodušené převodník pro spojení počítací s regulovaným objektem a řidící algoritmus sestává pouze z rozhodnutí, zda odchylna od žádané hodnoty je větší než dané pásmo necitivosti.

Příklad
Blokové schéma ohvodu je na obr. 97. Periodu vztokování je $T = 2$ s a diskrétní přenosová funkce lineární části ohvodu je

$$F_0(z) = \frac{X(z)}{S(z)} = 0,736 \frac{z + 0,717}{(z - 1)(z - 0,368)}$$



Obr. 97. Blokové schéma ohvodu s režcovým regulátorem



Blokové schéma nyní překreslím podle obr. 98 tak, aby byl odstraněn člen $(z + 0,717)$ v čitateli přenosu $F_0(z)$. Diferenciální rovnici transformovaného systému odvodíme takto

$$\begin{aligned} \dot{R}(z) &= -\frac{0,736(1 + 0,717)}{(z - 1)(z - 0,368)} \\ S(z) &= (z^2 - 1,368z + 0,368) = -1,264S(z) \end{aligned}$$

a tedy

$$\Delta z_r + 0,632 \Delta r = -1,264s$$

Z této rovnice dostaneme s použitím vztahu $\Delta r = y$ rovnici izoklin

$$y = -\frac{1,264s}{k + 0,632}$$

kde pro směrnicí k platí

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta r} = -0,632 - 1,264 \frac{s}{y}$$

Vzhledem k danému typu nonlinearity jsou izolány půmky rovnoběžné s osou r . Leží-li počáteční bod na osu r , nelze použít k konstrukci druhého bodu křivky řešení metody izoklin a souřadnice $y(1)$ musíme vypočítat z diferenční rovnice přímo. Platí

$$\Delta y + 0,632y = -1,264s$$

a pro souřadnici $y(1)$ bude

$$y_1 = -1,264s + 0,368y(0)$$

Protože $y(0) = 0$, jsou souřadnice bodu pro čas $T = 1$

$$y(1) = -1,264\text{s}$$

¹Přepinací přímky protinají vodorovnou osu v bodech $\pm e_i$, tj. $\pm 1,0$ a jejich rovnice jsou

$$r + \frac{y}{1517} = 1$$

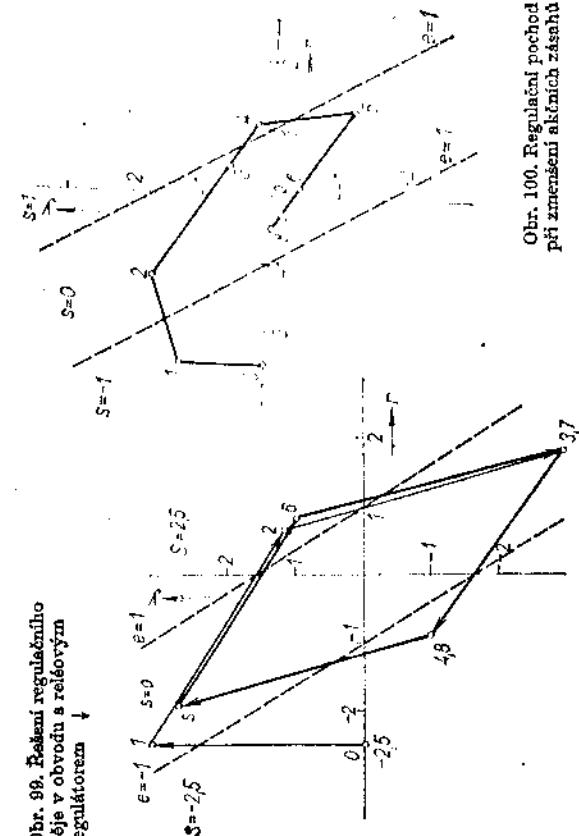
$$r + \frac{y}{\sqrt{17}} = -1$$

Sklon přepínacích přímenek, za předpokladu stejného měřítka na osách r a y ,
 $\varphi = \arctg 0,58 = 30^\circ$. Přímky dělí rovinu r , y na tři části:

pro $e < -1$, $s = -2,5$ je směrnice $h = -0,632 + \frac{3,16}{y}$

Postup řešení pro počáteční podmíinku $r(0) = -2,5$ ukazuje obr. 99. Obvod kružnice je nestabilní perioda, kmití 10 s. Obvod můžeme stabilizovat zmenšením akčních parametrů ϵ a s . Výsledek je na obr. 100.

Fig. 99. Řešení regulačního
obvodu s reléovým



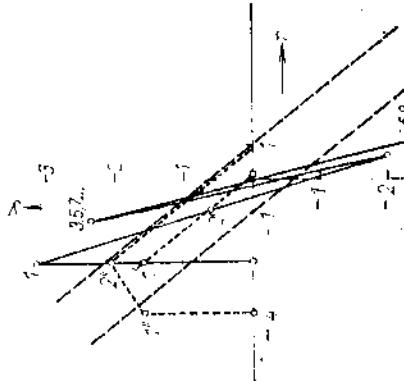
Obr. 100. Regulační pochod při zmenšení akčních zásahů

Zásluhu s. Zvolme-li $\delta = \pm 1$, zůstanou rovnice izoklin bez změny, směrnice na izoklinách budou mit ovšem jinou hodnotu. Řešení pro tento případ je na obr. 100.
Obrázek je stahován [zde](#).

Uzavření pro souběžnou provozu může být využito v závislosti na konstante K_2 . Podobnost s derivací zpětnou vazbou u spojitého systému je omezená. Amplituda mezného cyklu je sice změněna, peříoda kmití je nyní 4 s, stabilita riská nelze touto úpravou dosahnut. Nakreslené

10

卷之三



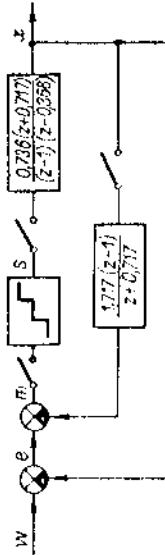
Obr. 101. Regulační poehod
při změně konstanty K_2

$K_2 = 2,717$ a velikost akčních zásahů $\alpha = \pm 2,5$. Během přenášení je na obr. 102. Přenosová funkce celé lineárního obvodu

řešení platí pro $K_2 = 2,717$ a velikost aktuálních zásahů $s = \pm 2,5$. Blokové schéma obvodu s kompenzací je na obr. 102. Přenosová funkce celé lineární části vyníme

$$F_0(z) = \frac{0.736(2,717z - 1)}{(z - 1)^{1/2} - 0.368} = \frac{2z - 0.736}{(z - 1)^{1/2} - 0.368}$$

Kromě změny kořene řešitele má zvětšení konstanty K_2 za následek zvětšení zesílení. Změnění akční zásahy na polovinu, tj. $s = \pm 1,25$, má řešení průběhu, naznačený v obr. 101 čárkován (body 1', 2' atd.). Pro počáteční hodnotu $r(0) = -4$ je řešení označeno čísly se dvěma čárkami (1'', 2'', atd.). V obou případech rezulují pochopně nejdřív písmena.



Obs. 103 Biologické zájemy abuštae se nezřídka hodnotí K_2 .

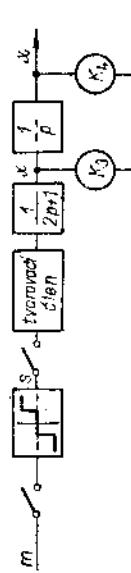
Do posud jsme sledovali chování systému pouze v rovině r, y . Ve většině případu však je užitečnější a důležitější znát průběh regulačního děje v rovině pro měnných x a x' , resp. ω a ω' . Obě roviny jsou spolu vztázeny snadno defi-



měných x a x' , resp. e a $\omega = \frac{de}{dx} = e'$. Obě roviny jsou spolu vztázeny směrnice definiční.

novatelnými vztahy, jde pouze o transformaci souřadnic. Blokové schéma modelu vztahů mezi proměnnými x , x' a r je na obr. 103. Konstanty K_3 a K_4 vypočítáme z rovnosti přenosů $\frac{R(z)}{S(z)}$ v obr. 103 a obr. 98. Ze schématu na obr. 103 určíme

$$\begin{aligned} \frac{R(z)}{S(z)} &= K_3 \frac{\frac{1 - e^{-Tp}}{z^2(p+1)}}{p(2p+1)} + K_4 \frac{\left\{ \frac{1 - e^{-Tp}}{p^2(2p+1)} \right\}}{z^2(p+1)} = \\ &= K_3 \cdot \frac{0,632}{z - 0,368} + K_4 \cdot \frac{0,736(z + 0,717)}{(z - 1)(z - 0,368)} \end{aligned}$$



a podle obr. 98 platí

$$\frac{R(z)}{S(z)} = -\frac{1,264}{(z-1)(z-0,368)}$$

Za stovrátní ohon rovnice plýme $K_3 = 1,165$, $K_4 = -1$. Počítáme podmínek $r(0)$ vypočítáme ze zadánych podmínek $x(0)$ a $x'(0)$ z následující rovnice

$$r(0) = -x(0) + 1,165x'(0) \quad (70)$$

Hodnotu druhé proměnné $y(0)$ vypočítáme dosazením do rovnice (69), za předpokladu, že $w(0) = 0$, a tedy $e(0) = -x(0)$. Proto

$$y(0) = [-x(0) - r(0)] 1,717 = -2x'(0) \quad (71)$$

Odvorené vztahy platí nejen pro počáteční hodnoty, ale též pro kterýkoli okamžik. Vztah mezi proměnnými $r(n)$, $y(n)$ a stavovými systému $x(n)$ a $x'(n)$ určuje transformační rovnice, kterou můžeme zapsat pomocí matice \mathbf{P}

$$\begin{bmatrix} r(n) \\ y(n) \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} x(n) \\ x'(n) \end{bmatrix}$$

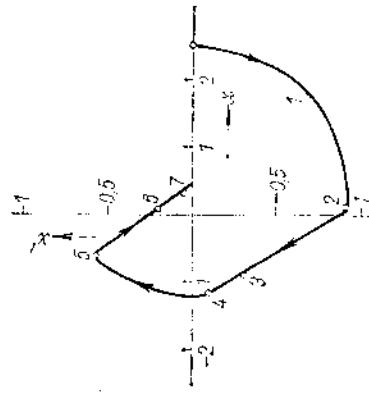
kde matice \mathbf{P} má členy

$$\mathbf{P} := \begin{bmatrix} -1 & +1,165 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Protože tato matice není singulární, je zobrazení v rovině r , y plné ekvivalentní zobrazení v rovině x , x' (popřípadě e , e'). Z toho vyplývá tento důležitý závěr: jakékoli oscilace, tedy i tzv. mezizároveň, kdy sice pláti $e(nT) = 0$, a tedy i $v(nT) = e([n+1]T) - e(nT) = 0$ lze zjistit v rovině r , y . Tento oscilace zřejmě nelze rozpoznat v rovině $e(n)$ a $v(n)$, zatímco v rovině $x(n)$ a $x'(n)$ můžou existují

(obě stavové proměnné nemohou být současně rovny nule). Zobrazení v rovině r , y je proto plně postačující k posouzení vlastnosti sledovaného objektu.

Pro strojní výsledků získaných výpočtem byl systém jeho řešení je uvedeno v obr. 100, modelován na analogovém počítači. Prepočteme-li podle rovnice (70) a (71) souřadnice jednotlivých bodů řešení do souřadnic v rovině x , x' , získáme body fázové trajektorie, zapsané na modelu sonádnicovým zapisovačem. Výsledek je na obr. 104. V následujícím příkladu je rozobraný vliv kvantování v lineárním



Obr. 104. Obdoba fázové trajektorie z obr. 100, zaznamenána ve spojité fázové rovině x , x'

systému. Tento případ je v praxi velmi častý, protože nelineární kvantovací proces probíhá v každém číslicově analožovém převodníku, který spojuje řidici počítač s regulovaným objektem.

Příklad

Regulovaná soustava má přenos

$$F_S(p) = \frac{1}{p^2}$$

Protože další požadavky nemáme, funkce $G(z) = 1$, takže přenos řízení má tvar

$$D(z) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{F_W(z)}{1 - F_W(z)} = \frac{2z-1}{2z+1}$$

Blokové schéma navrženého systému je na obr. 105. Pro řešení v příručkové rovině překreslime totto schéma pouze obr. 106. Z hlediska matematického popisu

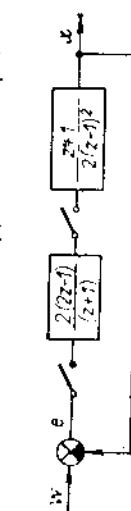
$$1 - F_W(z) = (1 - z^{-1})^2 G(z)$$

Protože dle požadavky nemáme, funkce $G(z) = 1$, takže přenos řízení má tvar

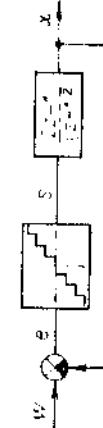
$$D(z) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{F_W(z)}{1 - F_W(z)} = \frac{2z-1}{2z+1}$$

systému je lhůtcejno, zda kvantovací člen je zapojen na vstupu nebo výstupu řídícího členu. Podle dríve popsaných pravidel provedeme nyní transformaci součadnic. Za předpokladu, že $w(t) = 0$, můžeme schéma znova překreslit podle obr. 107. Platí

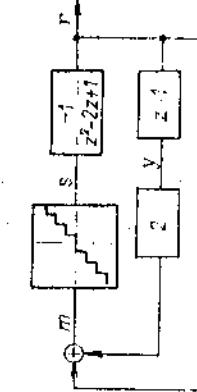
$$\frac{R(z)}{S(z)} = \frac{-1}{z^2 - 2z + 1}$$



Obr. 105. Blokové schéma obvodu pro ilustraci vlivu kvantování



Obr. 106. Blokové schéma s neliniekou kvantovacího člena



Obr. 107. Blokové schéma upravené pro výpočet v představové fazové rovině

$$\Delta r(n) = -s(n)$$

$$y(n+1) = -s(n) + y(n)$$

Z této rovnice, dosazením $\Delta r(n) = \Delta y(n+1) - y(n)$, vypočítáme rekurentní vztah pro výpočet hodnot $y(n)$

$$ky^2 - 2ky + (4 - 3k) = 0$$

Tuto rovnici použijeme pro konstrukci řešení místo geometrické konstrukce na základě izoklin. Hranicní přímky mezi jednotlivými pásmeny konstantních hodnot s (obr. 108) mají rovnici

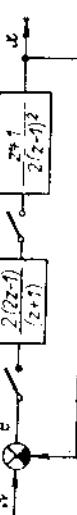
$$m = r + 2y$$

Rешení pro počáteční podmínky $r(0) = -y(0) = -2.5g$ je na obr. 109. Vzhledem k mezní cyklu, charakterizující oscilace v obvodu, Kmity však neznikají vždy, jak ukazuje řešení pro počáteční podmínce $y(0) = 0, r(0) = 2g$. Za reedení kvantovacího členu známou v tomto případě možnost vzniku oscilaci. Jejich amplituda je úměrná velikosti kvantování g . Jak ukážeme v následujícím odstavci, věnovaném stabilitě nelinéarních impulsních obvodů, vznik oscilací je zcela zákonitý, i když kritérium

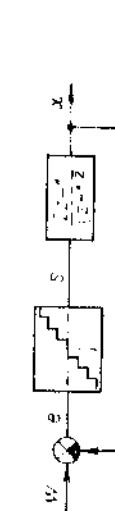
stability pro lineární systémy určuje kritické zesilení větší, než odpovídá linearizaci nelinéarního členu. Podle obr. 108 vidíme, že vždy platí $s \leq m$, takže bychom mohli plenos článku s kvantováním nahradit lineárním členem.

Podle lineární teorie určíme kritické zesilení takto: charakteristická rovnice systému je

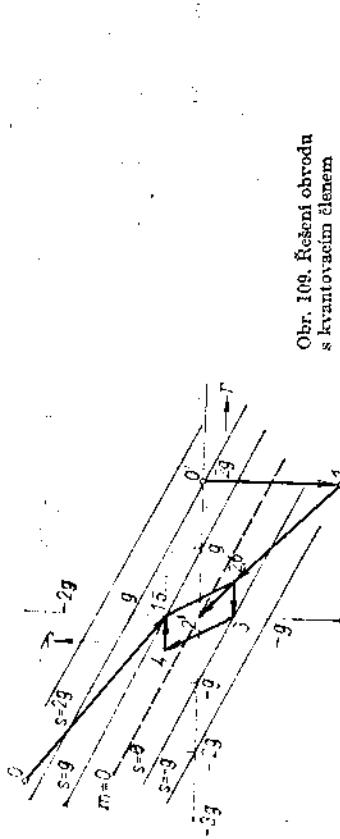
$$z^2 - 2(1 - k)z + (1 - k) = 0$$



Obr. 108. Blokové schéma upravené pro výpočet v představové fazové rovině



Obr. 109. Řešení obvodu s kvantovacím členem



Použijeme lineární transformace a dostaneme charakteristickou rovnici v pro- měnné w

$$kw^2 - 2kw + (4 - 3k) = 0$$

odkud plynne podmínka stability

$$k \leq \frac{4}{3}$$

I když tato podmínka pro linearizovaný systém je splněna, v obvodu mohou vzniknout kmity.

Pro určení stability nelinéarních diskrétních obvodů se používá buď Japunovovy primé metody nebo Popovovo kritérium. Popovovo kritérium, odvozené pro

25. STABILITA NELINÉÁRNÍCH OBVODŮ SE VZORKOVÁNÍM

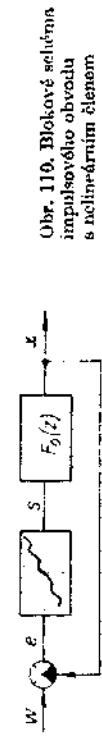
Pro určení stability nelinéarních diskrétních obvodů se používá buď Japunovovy primé metody nebo Popovovo kritérium. Popovovo kritérium, odvozené pro

spojité nelineární obvody, aplikoval na obvody se vzorkováním J. Z. Cypkin. Po drobné odvození najde čtenář v práci [2]. Zde uvedeme pouze konečnou formulaci Popovova kritéria a jeho použití.

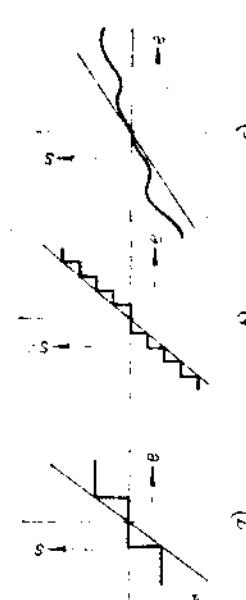
Předpokládejme, že obvod lze zároveň blokovým schématem podle obr. 110. Lineární část obvodu má diskrétní přenos $F_0(z)$ a připojený nelineární člen splňuje následující podmínky

$$s(0) = 0; \quad 0 < \frac{s(e)}{e} < k \quad \text{pro } e \neq 0$$

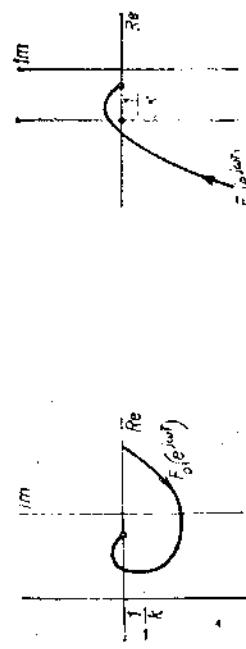
Podle těchto vztahů charakteristika nelineárního člena musí ležet v části roviny vymezené osou e a přímkou, která prochází počátkem a má směrnicí k . Příklady



Obr. 110. Blokové schéma impulsového obvodu s nelineárním členem



Obr. 111. Příklady nelineárních charakteristik, splňujících podmínku pro použití Popovova kritéria stability

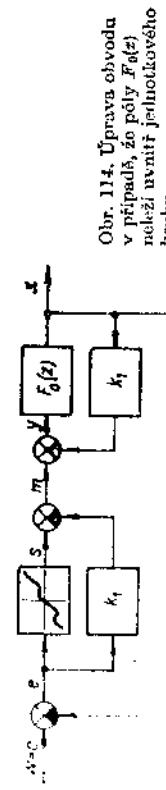


Obr. 112. Příklad systému, který je podle Popovova kritéria stabilní

charakteristiky, které tuto podmíinku splňují, jsou na obr. 111. Postačující podmínku pro stabilitu systému, jehož schéma je na obr. 110, vyjádřuje následující nerovnost

$$\operatorname{Re}[F_0(e^{j\omega T})] > -\frac{1}{k} \quad (72)$$

pro $0 < \omega < \frac{\omega_0}{T}$. Grafické vyjádření nerovnosti (72) je na obr. 112, kde je uveden příklad systému, který využívá Popovovo kritérium stabilitu. Na obr. 113 je na kreslení příklad systému, který toto kritérium nesplňuje. Je ovšem třeba mít na paměti, že Popovovo kritérium má charakter podmínky postačující, nikoli nutnou. Tak růžíškou skutečně zesílení potřebné pro vznik nestabilit je v aplikacích větší, než jaké vypočítáme na základě Popovova kritéria. Podobně je tomu i u spojitéch nelineárních obvodů. Je to způsobeno tím, že Popovovo kritérium se tyká absolutní



Obr. 114. Úprava obvodu v případě, že pól $F_0(z)$ leží uvnitř jednotkového kruhu

stability, bez ohledu na detailní průběh nelineární charakteristiky. Nelíneární charakteristika použitá v konkrétním případě nemusí mít z hlediska stability ten nejhezčejší průběh.

Popsané kritérium předpokládá, že $F_0(z)$ je stabilní, tzn. že polý této funkce leží uvnitř jednotkové kružnice v rovině z . Pro funkce, které tuto podmíinku nespĺňají, můžeme Popovovo kritérium upravit zavedením dvou pomocných vazeb, jak ukazuje obr. 114. Za předpokladu nulového vstupního signálu platí

$$y = m - k_1 x$$

$$m = s - k_1 e$$

a protože $e = -x$, po dosazení do běžcích rovnic vidíme, že $y = s$. Zavedenými vazbami jsme nezměnilis vlastnosti celého systému. Zpětnon vazby s koeficientem k_1 však dosáhneme toho, že polý nového přenosu

$$\frac{F'}{F'_0(z)} = \frac{F_0(z)}{1 + k_1 F_0(z)}$$

leží uvnitř jednotkové kružnice. Pro nelineární člen nyní platí

$$m(e) = s(e) - k_1 e$$

Funkce $m(e)$ musí využívat původní podmíinku, tj.

$$0 < \frac{m(e)}{e} < k$$

Z obou vztahů odvodíme podmíinku pro nelineární funkci $s(e)$

$$k_1 < -\frac{s(e)}{e} < k + k_1$$

což můžeme přepsat do tvary

$$k_1 < \frac{s(e)}{e} < k_2$$

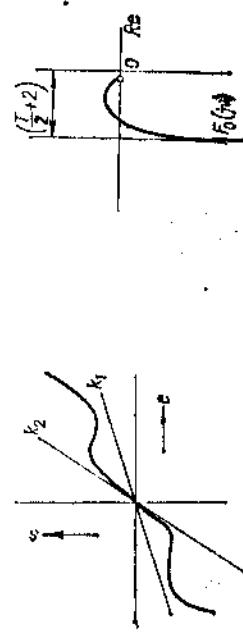
kde $k_2 = k + k_1$. Na obr. 115 je uveden příklad nelineární funkce, která využívá uvedeným nerovnostem.

Dodejme, že pro takové funkce $F_0(z)$, které mají pól na jednotkové kružnici, stojí libovolně malá hodnota k_1 k tomu, aby pól byl pěnisten trvale dovnitř kružnice. V těchto případech proto statí spinut nerovnost $s(z) > 0$ pro všechna $z \neq 0$.

Pro konstrukci funkce $F_0(e^{j\omega z})$ používáme obvykle přerozděl do roviny w podle vztahu

$$w = \frac{1 + z}{1 - z}.$$

Do funkce $F_0(w)$ pak dosadíme za $w = jv$, kde v má význam tzv. pseudofrekvence. Postup výpočtu ukážeme na následujících příkladech.



Obr. 115. Charakteristika nelineárního člena, vykreslená v polárním souřadnicovém systému na obr. 97 upraveného schématu na obr. 114

Příklad

Pro systém, jehož schéma je na obr. 97, máme vypočítat maximální velikost akčních zásahů s při proměnné periodě T . Pro funkci $F_0(z)$ platí

$$F_0(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-Tz}}{z^2} \cdot \frac{1}{(2p+1)} \right\} = T \frac{az + b}{(z-1)(z-d)}$$

$$\text{kde } d = e^{-T/2}$$

$$a = 1 - \frac{2}{T} (1 - d)$$

$$b = \frac{2}{T} (1 - d) - d$$

Po dosazení $z = \frac{1 + iw}{1 - iw}$ dostaneme přenosovou funkci v proměnné w

$$F_0(w) = T \frac{(b - \sigma) w^2 - 2iw + (\alpha + b)}{2(i - d) w \left[\frac{1 + d}{1 - d} w + 1 \right]}$$

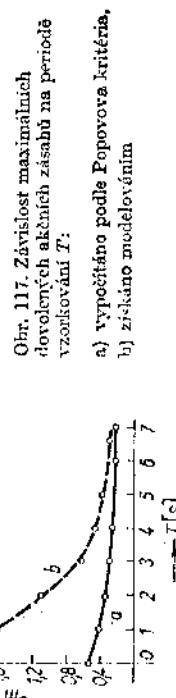
Dosadíme-li $w = jr$, má pro $0 < r < \infty$ impulsová frekvenční charakteristika $F_0(jr)$ tvar podle obr. 116. Nejmenší reálnou hodnotu vypočteme podle vztahu

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{Re}[F_0(jr)] = \frac{T}{2} + 2$$

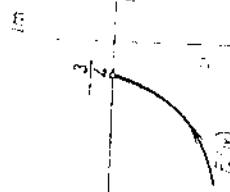
Přesné nečitlivosti režimového regulátoru je rovno jedné, takže maximální hodnota akční veličiny s je určena rovnicí

$$s_m = \frac{2}{T} + 4$$

Tato funkce je vykreslena na obr. 117. Pro srovnání jsou zde uvedeny též kritické hodnoty aktuální veličiny získané modelováním na hybridním počítači (čárkovací křížka). Je vidět, že čím více se vlastnosti obvodu vzdáluji vlastnostem spojitych



systemu (čím větší je perioda vzorkování vzhledem k časovým konstantám soustavy), tím více se blíží kritická hodnota vypočítaná podle Popovova kritéria k hodnotě zjištěné modelováním. Při ověřování vypočítaných výsledků na modelu je výšeření stability mnohem pracnejší než u spojitych systémů, neboť je třeba provést řadu experimentů pro nejrůznější počáteční podmínky. V obvodech se vztahuje však totíž možou vzniknout mezní rotory v rozmezí vlastních vlastností periody vzorkování T .



Obr. 118. Řešení stability obvodu podle obr. 106

Příklad

Pomocí Popovova kritéria stability máme ověřit vliv kvantovacího člena v systému, jehož blokové schéma je na obr. 106. Přenosová funkce lineární části obvodu je

$$F_0(z) = \frac{2z - 1}{(z - 1)^2}$$

U skutečnému transformaci do roviny w a dostaneme

$$F_0(w) = \frac{1 + 2w - 3w^2}{4w^2}$$

odkud dosazením $w = jr$ získáme vztorec impulsové frekvenční charakteristiky

$$F_0(jr) = -\frac{1}{4r^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2r}$$

Grafické znázornění je na obr. 118. Reálná část nabývá nejmenší hodnoty pro $v \rightarrow 0$

$$\lim_{v \rightarrow 0} \operatorname{Re}[F_0(jv)] = -\infty$$

Odtud plyne, že v přítomnosti nelineárního členu s libovolně malým linearizovaným zeslením k mohou vzniknout oscilace (což dokazuje řešení v přísluškové fázové rovině na obr. 109).

Příklad

K regulované soustavě ze schématu na obr. 105 je navržen jiný řídící člen, který zajistuje multivon ustálilren odchylku pouze při konstantním řídicím signálu a přechodný díl končí v koncovém počtu kroků. Zjistěte, zda zavedený člen s kvantovaním vzniknou i v takovém obvodu kmity.

Jednoduchým výpočtem obdržíme požadovaný přenos řídícího členu

$$D(z) = \frac{z-1}{(z-0,5)}$$

Protože přenos regulované soustavy s tvarovačem může být řádu 1

$$F_C(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{z+1}{(z-1)s}$$

je celkový přenos lineární části obvodu (regulátoru a soustavy) dán vztahem

$$F_0(z) = D(z) F_C(z) = \frac{0,5(z+1)}{(z-1)(z+0,5)} = \frac{0,5(z+1)}{z^2 - 0,5z - 0,5}$$

Po transformaci do roviny w bude přenos $F_0(w)$ ve tvaru

$$F_0(w) = \frac{1-w}{w(3+w)}$$

a pro pseudofrekvenční charakteristiku platí

$$F_0(jv) = \frac{1-jv}{jv(3+jv)}$$

Jednoduchou úpravou vypočítáme nyní reálnou část $F_0(jv)$

$$\operatorname{Re}[F_0(jv)] = \frac{-4}{v^2 + 9}$$

Nejmenší hodnoty nabývá reálná část pseudofrekvenční charakteristiky opět pro $v \rightarrow 0$, a to $-0,444$. Charakteristika pripojeného nelineárního členu tedy musí splňovat podmítku

$$0 < \frac{s(e)}{e} < 2,25$$

Na obr. 119 je charakteristika kvantovacího členu, který právě splňuje uvedenou podmítku. Výsledek zkонтrolujeme konstrukcí v přísluškové fázové rovině. Blokové schéma pro odvození potřebných vztahů je na obr. 120. Platí

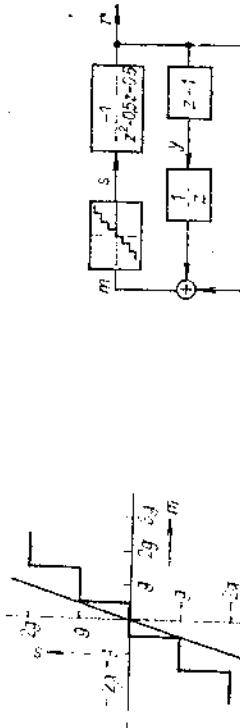
$$\frac{R(z)}{S(z)} = \frac{1}{z^2 - 0,5z - 0,5}$$

odhad

$$\Delta^2 r(n) + 1,5 \Delta r(n) = -s(n)$$

Do této rovnice dosadíme $\Delta^2 r(n) = \Delta y(n)$ a získáme rekurentní vztah pro výpočet hodnot $y(n+1)$

$$y(n+1) = -s(n) - 0,5y(n)$$



Obr. 119. Charakteristika kvantovacího členu, který splňuje podmítku stability pro obvod na obr. 120

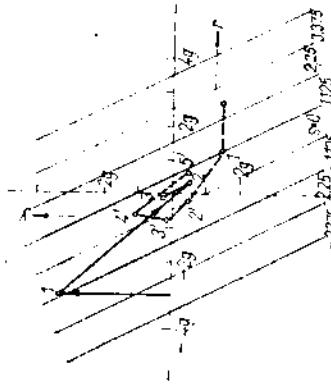
Pro hodnoty $r(n+1)$ platí

$$r(n+1) = r(n) + y(n)$$

Sílon přepínacích přímků je dán rovnicí

$$m = r + 0,5y$$

Řešení pro různé počítací podmínky je na obr. 121. Je zřejmé, že oscilace nevznikají, regulační pochod se po několika periodách ustáluje.



Obr. 120. Blokové schéma nelineárního obvodu pro řešení v přísluškové fázové rovině

Úplný rozbor stability systému se vztokováním lze udělat též použitím přímé Ljapunovovy metody. Hlavním problémem je nalezení vhodné Ljapunovovy funkce. Podrobnejší popis najdeš čtení např. v [1].

VI. METODA STAVOVÉHO PROSTORU

stémů spojitéch, čas je ovšem vyjádřen v diskrétních hodnotách

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{G}(k) \mathbf{X}(k) + \mathbf{H}(k) \mathbf{U}(k) \quad (73)$$

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}(k) \mathbf{X}(k) + \mathbf{D}(k) \mathbf{U}(k) \quad (74)$$

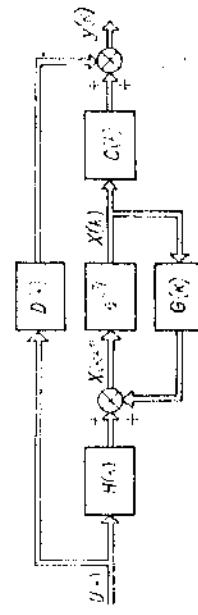
Zde $\mathbf{X}(k)$ je stavový vektor, $\mathbf{U}(k)$ vektor vstupních proměnných a $\mathbf{Y}(k)$ vektor výstupních proměnných, růž v čase $t_k = kT$. Pro zjednodušení zápisu budeme psát $\mathbf{X}(k)$ námisto $\mathbf{X}(kT)$. Blokové schéma odpovídající rovnici (73) a (74) je na obr. 122.

Zápis a řešení regulačních obvodů pomocí stavových proměnných se zásadně liší od metod, které jsme dosud používali. Ve všech předebehajících úvahách jsme za zakladání informace o členech i celých systémech považovali přenosovou funkci, která charakterizuje vztah mezi vstupem a výstupem článku nebo systému. Pomoci tohoto vztahu můžeme vypočítat oděruznu systému na dany budici signal, avšak pouze za předpokladu nutových počítačních podmínek. O vznitímu starové dynamického systému nedává tento postup žádoru o informaci. Nužové počítací podmínky znamenají, že systém se na začátku nachází ve stavu naprosteho klidu.

Metoda stavového prostoru naproti tomu dává upřímný obraz o všech dynamických vlastnostech, tedy i těch, které z hlediska vztahu vstup - výstup nejsou pouzorovatelné. Zatímco klasické teorie spojitéch i vzorkovaných lineárních systémů používají pro analýzu a syntézu frekvenční oblast, moderní m-tody založené na starovém prostoru pracují v časové oblasti. Po formalní stránce nejdřívejší metoda starového prostoru mnoho nového, jsou používány principy známé z klasické teorie dynamiky a jiných oblastí. Proti klasickým metodám však umozňuje exaktnejší řešení systémů s časově proměnnými parametry, s několika vstupy a výstupy, i ohodou diskrétní a nelineární.

Stavový dynamického systému rozumíme nejmenší souhrn hodnot platných v čase t a definovaných tak, aby při známku budici funkci bylo možné určit tento souhrn pro jakékoli $t > t_0$. To znamená, že stav systému pro čas $t > t_0$ není závislý na stavu před časem t_0 . Množinu proměnných definujících stav systému nazveme stavovými proměnnými. Tyto stavové proměnné nemusí být fyzikálně měřitelné na daném systému, i když je pro praxi vhodnější, jsou-li jejich realizace k dispozici. U jednoduchého systému nemusí mit stavové proměnné vždy stejný fyzikální význam, můžeme použít několika různých definic. Jako příklad uvedeme mechanický systém druhého řádu, jehož stav v každém okamžiku je popsán polohou a rychlostí (obvyklý případ pro řešení dynamiky systému ve fazové rovině). Stejně dobré můžeme stav tohoto systému popsat dvojici různých sférických koordinací této druhu veličin. Geometricky to znamená pootocení os polohy a rychlosti ve fazové rovině.

Stavové proměnné mají geometricky význam souběžnic stavového prostoru, ve kterém řešíme chování systému. Stav systému reprezentuje poloha zastupujícího bodu, jehož spojnice s počátkem nazveme stavovým vektorem. Pojet stavových proměnných, nutných k úplnému popisu stavu systému, závisí na rámu diferenciální rovnice, která popisuje systém. V případě systému se vznikováním je určující rád diferenciální rovnice systému.



Obr. 122. Schéma systému, který je popsán stejnými rovniciemi (73) a (74)

Blok s přenosem $e^{-T\mathbf{P}}$ zpřesňuje zpoždění procházejících signálů o jeden periodu vzdložení T . Ostatní bloky, $\mathbf{H}(k)$, $\mathbf{G}(k)$, $\mathbf{D}(k)$ a $\mathbf{C}(k)$ charakterizují vztahy mezi jednotlivými proměnnými. V horní části (73) a (74) jsou matice $\mathbf{H}(k)$, $\mathbf{G}(k)$, $\mathbf{D}(k)$ a $\mathbf{C}(k)$ funkciemi času, což znamená, že parametry systému jsou pronálenné s časem. Není-li tomu tak, jde-li o lineární systém s konstantními parametry, jsou dveře uvedené matice konstantní a starové rovnice pak mají tvar

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{X}(k) + \mathbf{H}\mathbf{U}(k) \quad (75)$$

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{X}(k) + \mathbf{D}\mathbf{U}(k) \quad (76)$$

Poznamenejme, že většinu nelineárních obvodů lze řešit jako lineární s časově proměnnými parametry, podle rovnice (73) a (74). Pak je třeba rozhodovat o hodnotách pravé matice \mathbf{H} , \mathbf{G} , \mathbf{D} a \mathbf{C} v každém kroku v závislosti na hodnotách jednotlivých starových proměnných.

27. VÝBER STAVOVÝCH PROMĚNNÝCH

Vlastnosti sledovaného dynamického systému se vznikováním mohou být zadány buď diferenční rovnicí, nebo odpovídajícím vztahem mezi různými skupinami výstupními veličinami (pro jednoduchost budeme zatím předpokládat systém s jedním vstupem a jedním výstupem). Probereme oba případy. Předpokládejme diferenční rovnici ve tváru

$$\begin{aligned} \Delta y(k) &= a_1 \Delta^u y(k) + a_2 \Delta^{u-1} y(k) + \dots + a_{n-1} \Delta y(k) + a_n y(k) = \\ &= bu(k) \end{aligned} \quad (77)$$

Zavedeme stavové proměnné podle následujících rovnic

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) \\ x_2(k) &= \Delta y(k) = y(k+1) - y(k) = x_1(k+1) - x_1(k) \\ x_3(k) &= \Delta^2 y(k) = \Delta y(k+1) - \Delta y(k) = x_2(k+1) - x_2(k) \\ &\vdots \\ x_{n+1}(k) &= \Delta^u y(k) = bu(k) - a_1 x_n(k) - a_2 x_{n-1} y(k) - \dots - a_{n-1} x_2(k) - a_n x_1(k) = x_n(k+1) - x_n(k) \end{aligned}$$

26. STAVOVÉ ROVNICE SYSTÉMU SE VZORKOVÁNÍM

Uvažujme lineární systém se vznikováním, které probíhá v časech nT a trvá zanedbatelně krátkon dobu. Starové rovnice systému mezi obdobány trvají u s

Protože pro formulaci rovnic (75) a (76) chceme znát vztah mezi dvěma následujícími hodnotami stavových proměnných $x_i(k+1)$ a $x_i(k)$, upravíme rovnice do tvaru

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) \\ x_1(k+1) &= x_2(k) + x_1(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) + x_2(k) \\ \vdots & \\ x_n(k+1) &= (1 - a_1)x_n(k) - a_2x_{n-1}(k) - \dots - a_{n-1}x_2(k) - a_nx_1(k) + bu(k) \end{aligned}$$

Maticový zápis této soustavy rovnic je první stavovou rovnicí

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_1(k) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & x_2(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & x_3(k) \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & 1 - a_1 & x_n(k) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ bu(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Druhá stavová rovnice

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) - bu(k) \\ x_2(k) &= x_1(k+1) - bu(k) \\ \vdots & \\ x_n(k) &= x_{n-1}(k+1) - bu(k) \end{aligned}$$

Tvar matic \mathbf{G} , \mathbf{H} a \mathbf{C} je zřejmý z obou rovinic. Sloupcová matice \mathbf{D} je rovna nule. Matice \mathbf{G} je štvorcová, matice \mathbf{H} sloupcová a matice \mathbf{C} řádková.

Rovnice (77) je zvláštním případem obecné diferenční rovnice, ve které se vyskytují též diference vstupní proměnné $u(k)$. Tato rovnice má tvar

$$\begin{aligned} \Delta^ny(k) + a_1\Delta^{n-1}y(k) + \dots + a_{n-1}\Delta y(k) + a_n y(k) &= \\ = b_n\Delta^nu(k) + b_{n-1}\Delta^{n-1}u(k) + \dots + b_1\Delta u(k) + b_0u(k) & \quad (78) \end{aligned}$$

Starové proměnné definujeme

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) - bu(k) \\ x_1(k+1) &= x_2(k) + x_1(k) - bu(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) + x_2(k) + bu(k) \\ \vdots & \\ x_n(k+1) &= (1 - a_1)x_n(k) - a_2x_{n-1}(k) - \dots - a_{n-1}x_2(k) - a_nx_1(k) + bu(k) \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} h_0 &= b_0 \\ h_1 &= b_1 - a_1h_0 \\ \vdots & \\ h_n &= b_n - a_1h_{n-1} - \dots - a_{n-1}h_1 - a_nh_0 \end{aligned}$$

Starové rovnice pak jsou

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & 1 - a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} u(k)$$

Na rozdíl od předchozího případu matice \mathbf{D} není teď nulová.

Tento způsob volby stavových proměnných je zvláště vhodný v těch případech, když jako počítačová podmínky jsou dány hodnoty diferenční vstupní funkce. Diferenční rovnici (78) lze vždy upravit na tvar

$$\begin{aligned} y(k+n) + a_1y(k+n-1) + a_2y(k+n-2) + \dots + a_{n-1}y(k+1) + \\ + a_ny(k) = bu(k+n) + bu(k+n-1) + \dots + bu(k+1) + b_nu(k) \quad (79) \end{aligned}$$

Koefficienty a_1 a b_1 mají ovšem jiné hodnoty. Starové proměnné zvolíme podle rovnice

$$\begin{aligned} x_1(k) &= y(k) - bu(k) \\ x_2(k) &= x_1(k+1) - bu(k) \\ \vdots & \\ x_n(k) &= x_{n-1}(k+1) - bu(k) \end{aligned}$$

Proti předchozímu případu se změní pouze matice \mathbf{G} , ostatní zůstávají stejně. Druhá stavová rovnice teď hude nezměněna, kdežto první má tvar

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & 1 - a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} u(k)$$

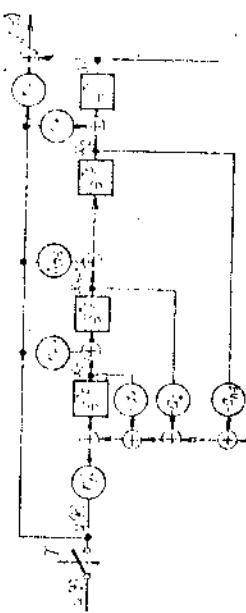
$$\begin{aligned} Místo rovnice (79) můžeme použít diskrétního obrazu \\ F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_nz^{-n}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}} \quad (80) \end{aligned}$$

Postup, podle kterého jsme zavedli stavové proměnné, se často též nazývá proměnným programováním. Blokové schéma, které odpovídá odvozeným stavovým proměnným

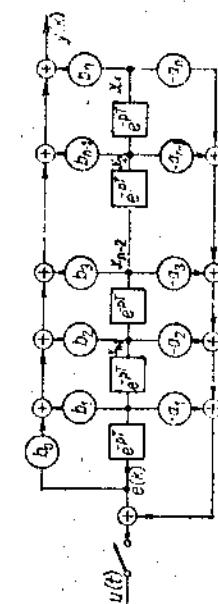
nym, je na obr. 123. V některých případech je třeba použít modelu podle obr. 124. Tento model formě odpovídá rovnici (80), neboť platí

$$E(z) = U(z) - \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{n-1} z^{-(n-1)} + b_n z^{-n}} E(z)$$

$$E(z) = U(z) - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}) E(z)$$



Obr. 123. Stejný diagram souběžnosti v Hebrajštině



Obr. 144. Stavový diagram podle rovnice (79)

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ \vdots & \\ x_n(k+1) &= -a_{n-1}(k) - a_{n-2}(k) - \cdots - a_1x_{n-1}(k) - b_0x_n(k) + u(k) \\ y(k) &= b_nx_1(k) + b_{n-1}x_2(k) + \cdots + b_2x_{n-1}(k) + b_0x_n(k) + u(k) \end{aligned}$$

Matice výrovice rovnice mají maticový tvar

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1(k) \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & x_2(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & x_3(k) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n-1}(k) \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Stavové rovnice mají maticový tvar

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_2(k) \\x_2(k+1) &= x_3(k) \\&\vdots \\x_n(k+1) &= -a_n x_1(k) + b\end{aligned}$$

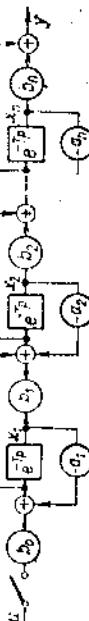
1

Priecosová funkce bývá často zadána ve tvaru soudruženého výrazu činitelů

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = b_0 \frac{(1 + b_1 z^{-1})(1 + b_2 z^{-1}) \dots}{(1 + a_1 z^{-1})(1 + a_2 z^{-1}) \dots}$$

Tento postup bývá nazýván sériovým programováním. Blokové schéma odpovídá jeho modelu je na obr. 125. Starově rovnice jsou

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -a_1x_1(k) + b_{01}(k) \\ x_2(k+1) &= b_{11}x_1(k) - a_2x_2(k) - a_1x_1(k) + b_{02}(k) \\ x_3(k+1) &= b_{22}x_2(k) - a_3x_3(k) + b_{11}x_1(k) - a_2x_2(k) - a_1x_1(k) + b_{03}(k) \\ &\vdots \\ x_n(k+1) &= b_{n-1,n}x_{n-1}(k) - a_nx_n(k) + x_{n-1}(k-1) \\ y(k) &= b_nx_n(k) + x_n(k+1) = (b_1 - a_1)x_1(k) + (b_2 - a_2)x_2(k) + \dots + \\ &\quad + (b_n - a_n)x_n(k) + u(k) \end{aligned}$$



Obr. 125. Diagram stavových proměnných, je-li přenosová funkce zadána ve tvaru součinu kořenových činitelů

Odpovídající stavové rovnice v maticeovém formátu jsou

$$= \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix}$$

$$y(k) = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3, \dots, b_n - a_n]$$

Na základě bývá uváděno tzv. paralelní programování, které od-
díci re tvára

$$F(z) = \frac{1 + bz^{-1}}{1 + az^{-1}} \div \frac{1 + bz^{-1}}{1 + az^{-1}} + \dots$$

prých rovnice je obdobným jako u přímého a sériového progra-

Postup odvození stavových rovnic je obdobný jako u primého a sériového programu, "nohudeno se" výpočetem.

Jak vyplývá z uvedených příkladů, existují různé možnosti volby stavových proměnných, a tím i typu stavového prostoru. Obecný postup, který vždy vede k celi, je tento:

- daný systém popíšeme buď diferenční rovnicí, nebo pomocí diskrétního obrazu pravoslovných funkcí.
- se stavové odpovídající model tak, aby jeho zápis metodou stavových proměnných byl s příslušným k danému provedenou operaci co nejednodušší. Při sestavování modelu používáme tři typových prvků: seřídičich členů, násobení konstantou a členy se zpožděním o periodu T .
- za stavové proměnné zvolíme výstupy všech požadovaných členů. Z této rovnice určíme matici \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{C} a \mathbf{D} .

28. ŘEŠENÍ DISKRETNÍCH STAVOVÝCH ROVNIC

Obsahuje-li systém pouze členy se vzdálkováním nulo řešíme-li průběh regulačního děje pouze z hlediska času $t_n = nT$, jsou rovnice (73) a (74), resp. (75) a (76) plně postačující pro popis systému. Pro dané požadavky, tj. vektory $\mathbf{X}(0)$ a $\mathbf{U}(0)$, má řešení v časech $t_r = kT$ tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(1) &= \mathbf{G}\mathbf{X}(0) + \mathbf{H}\mathbf{U}(0) \\ \mathbf{X}(2) &= \mathbf{G}\mathbf{X}(1) + \mathbf{H}\mathbf{U}(1) = \mathbf{G}^2\mathbf{X}(0) + \mathbf{G}\mathbf{H}\mathbf{U}(0) + \mathbf{H}\mathbf{U}(1) \end{aligned} \quad (81)$$

Odtud vyplývá rekurentní vzorec

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{G}^k\mathbf{X}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{G}^{k-i-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(i) \quad (81)$$

Řešení (81) má dvě části. První část závisí na vnitřních vlastnostech systému a na požadavkách stavu $\mathbf{X}(0)$, druhá část vyjadruje vliv vstupního signálu $\mathbf{U}(i)$. V souvislosti s tímto závěrem bývá často definována tzv. přechodová matice

$$\Phi(k) = \mathbf{G}^k$$

Pro kterou platí

$$\Phi(k+1) = \mathbf{G}\Phi(k) \quad \text{a} \quad \Phi(0) = \mathbf{I}$$

Pomocí této matice můžeme rovnici (81) zapsat v jednoduchém tvaru

$$\mathbf{X}(k) = \Phi(k)\mathbf{X}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(i)\mathbf{H}\mathbf{U}(k-i-1) \quad (82)$$

Druhá stavová rovnice pak bude

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}\Phi(k)\mathbf{X}(0) + \mathbf{C} \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(i)\mathbf{H}\mathbf{U}(k-i-1) + \mathbf{D}\mathbf{U}(k) \quad (83)$$

Podobně jako u spojitéch systémů i v případě systému se vztahováním mezi řešení stavových rovnic použít transformace. První stavovou rovnici (75) podrobíme transformaci \mathcal{Z} a dostaneme

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{X}(0) = \mathbf{G}\mathbf{X}(z) + \mathbf{H}\mathbf{U}(z)$$

odkud

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{G}^{-1}z)\mathbf{X}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{G})^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z) \quad (84)$$

K řešení použijeme zpětné transformace

$$\mathbf{X}(k) = \mathcal{Z}^{-1}[z\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1}z\mathbf{I}\mathbf{X}(0) + \mathcal{Z}^{-1}[z\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1}\mathbf{H}\mathbf{U}(z) \quad (85)$$

Porovnáním rovnic (85) a (82) vidíme, že platí

$$\Phi(k) = \mathcal{Z}^{-1}[z\mathbf{I} - \mathbf{G}]^{-1}z$$

Závěrem je třeba upozornit na souvisejost mezi maticí \mathbf{G} a stabilitou celého systému. Z rovnice (84) vidíme, že charakteristická rovnice systému je

$$\det[z\mathbf{I} - \mathbf{G}] = 0$$

a podle kap. III, čl. 16 je systém stabilní tehdy, leží-li všechny kořeny charakteristické rovnice uvnitř jednotkové kružnice v rovině z .

29. STAVOVÉ ROVNICE VSTUPNÍCH SIGNÁLU

Jak bylo ukrázeno v předešlém článku, řešení obou vektorů, $\mathbf{X}(k)$ i $\mathbf{Y}(k)$ se skládá ze dvou částí. K podstatnému zjednodušení by došlo, když všechny vstupní signály $\mathbf{U}(k)$ mohli zahrnout do vnitřních signálů systému. To je možné tehdy, je-li pojem známý, jakého typu je vstupní signál. Je-li to funkce konstantní, lineární nebo sinusová, můžeme vytvořit generátor této funkce a přidat jeho výstup jako jeden stavovou proměnnou. Podobně je tomu i v případě většího počtu vstupních veličin. Předpokládejme, že samotný systém má n vnitřních stavových proměnných x_1, x_2, \dots, x_n a m vstupů u_1, u_2, \dots, u_m . Definujeme rozšířený stavový vektor $\mathbf{V}(k)$

$$\mathbf{V}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(k) \\ \mathbf{U}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \\ u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ \vdots \\ v_n(k) \\ v_{n+1}(k) \\ \vdots \\ v_{n+m}(k) \end{bmatrix}$$

Stavové rovnice jsou

$$\mathbf{V}(k+1) = \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{V}(k) \quad (86)$$

$$\mathbf{Y}(k) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{V}(k) \quad (87)$$

Ide

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}$$

\mathbf{K} je matice popisující funkci generátoru vstupních veličin u ,

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$$

a stavový vektor

$$\mathbf{V}(2) = \bar{\Phi}(2) \cdot \mathbf{V}(0) = \begin{bmatrix} 1,333 \\ 0,283 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Výstupní hodnota $y(2) = 0,55$.

30. ŘEŠENÍ OBVODŮ SE SPOJITÉ PRACUJÍCÍMI ČLENY

Většina regulačních soustav jsou spojité pracující obvody a jejich zápis vo stavovém prostoru je kombinací rovnic pro spojité systémy s rovnicemi diskrétních systémů. Stavové rovnice spojitých systémů jsou obvykle psány ve tvaru

$$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{AX}(t) + \mathbf{BU}(t) \quad (88)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{CX}(t) + \mathbf{DU}(t) \quad (89)$$

Jsou-li vstupní proměnné zahrnuty do systému, pak platí

$$\frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} = \mathbf{V}'(t) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{V}(t) \quad (90)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{V}(t) \quad (91)$$

kde

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix}$$

\mathbf{L} je maticce popisující funkci generátoru vstupních veličin u ,

$$\bar{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$$

Zde předpokládáme, že matice $\bar{\mathbf{A}}$ i $\bar{\mathbf{C}}$ jsou časově nezávislé, jde tedy o lineární systém s konstantními parametry. V opaženém případě (řasové proměnné systémy) jsou tyto matice funkci času, $\bar{\mathbf{A}}(t)$ a $\bar{\mathbf{C}}(t)$. Rovnice (90) můžeme řešit např. Laplaceovou transformací

$$\mathcal{P}\mathbf{V}(p) - \mathbf{V}(0) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{W}(p)$$

odkud

$$\mathbf{Y}(p) = (p\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1} \mathbf{V}(0)$$

Definujeme matici přenosových funkcí

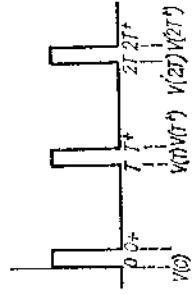
$$\bar{\Phi}(p) = (p\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}$$

za které pomocí inverzní Laplaceovy transformace vypočítáme matice přenosů $\bar{\Phi}(t)$. Pro rozšíření stavový vektor $\mathbf{V}(t)$ platí

$$\mathbf{V}(t) = \bar{\Phi}(t) \mathbf{V}(0)$$

Tato stavová rovnice platí pro spojité systémy, tedy v čase, kdy lze obvod nebo jeho část považovat za spojitý. To platí např. o regulační soustavě, na jejímž vstupu je zapojen tvarovač nálefku. Vstup soustavy pak je po celou dobu periodický konstantní. Podobně jo-l použít tvarovač prvního řádu, měni se vstupní

veličina lineárně. Rovnice (92) tak platí v časech $nT < t < (n+1)T$. V okamží- eich vztorkovaných, o kterých předpokládáme, že jsou nekončeně krátké, spojité pro- měnné nemění svou hodnotu. Funkce, které jsou vztorkované, se ovšem mění. Tato změna je vyjádřena maticí \mathbf{M} , která zachycuje vzájemný vztah jednotlivých sta- vových proměnných před a po vztorkování. K osvětlení celého procesu slouží obr. 131. V čase $t = 0$ je systém popsán vektorem počítacích podmínek $\mathbf{V}(0)$.



Obr. 131. Grafické znázornění postupu výpočtu stavového vektora

V tomtéž okamžíku dojde ke vztorkování. Hodnoty stavových proměnných po vztorkování, v čase $t = 0^+$, označme v_i^+ a odpovídají vektoru $\mathbf{V}(0^+)$. Matice \mathbf{M} je definována vztahem

$$\mathbf{V}(0^+) = \mathbf{M} \mathbf{V}(0)$$

Od tohoto okamžiku dle do času $t = T$ můžeme systém prováděvat za spojity. Platí tedy rovnice

$$\mathbf{V}(t) = \bar{\Phi}(t) \mathbf{V}(0^+) = \bar{\Phi}(t) \mathbf{M} \mathbf{V}(0)$$

Speciálně pro $t = T$ platí

$$\mathbf{V}(T) = \bar{\Phi}(T) \mathbf{V}(0^+) = \bar{\Phi}(T) \mathbf{M} \mathbf{V}(0)$$

Pro zjednodušení zápisu zavedeme značení

$$\mathbf{N}(t) = \bar{\Phi}(t) \mathbf{M}$$

takže

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{N}(t) \mathbf{V}(0)$$

$$\mathbf{V}(T) = \mathbf{N}(T) \mathbf{V}(0)$$

V okamžíku $t = T$ opět dochází ke vztorkování, po kterém platí

$$\mathbf{V}(t) = \bar{\Phi}(t - T) \mathbf{V}(T^+) = \bar{\Phi}(t - T) \mathbf{M} \mathbf{N} \mathbf{V}(0)$$

Opakováním postupu můžeme odvodit rekurentní vzorec pro stavový vektor $\mathbf{V}(t)$ v čase $nT < t < (n+1)T$

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{N}(t - nT) \mathbf{V}(nT) = \mathbf{N}(t - nT) \mathbf{N}^n(T) \mathbf{V}(0) \quad (93)$$

Pro okamžíky vztorkování $t_1 = nT$ platí

$$\mathbf{V}(nT) = \mathbf{N}^n(T) \mathbf{V}(0)$$

Porovnáním s rovnicí (86) vidíme, že matice $\mathbf{N}(t')$ je totičná s maticí \mathbf{G} , používá-

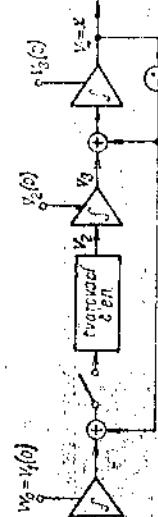
Prakticky postup ukažeme na následujících příkladech. Rozšířený stavový vektor \mathbf{v} bude mít tvar

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{V}(t) \end{bmatrix}$$

A tím se patří změní i tvárnice $\bar{A}, \bar{C}, \bar{\Phi}, M$ a N .

227

Blokové schéma lineárního obvodu se vzorkováním je na obr. 132. Řidičí veličina je konstantní u_0 . Sestavte stavové rovnice a vypočítejte stavový vektor



čas $t = 4,2T = 2,1$ s. Diagram stavových proměnných je na obr. 133. Pro sta-

$$v_1' = 0 \\ v_2' = 0 \\ v_3' = v_2 \\ v_4' = v_3 - v_4$$

Přenosovou matici určí mužeme vypočítat ze vzájemného soustavu rovnic definujících matici \bar{A}

$$\overline{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[(p) - \overline{A}]^{-1}\}$$

Přímo z diagramu stavových proměnných růžak můžeme psát

$$\Omega(t) = \omega_1(0^+)$$

$$v_2(t) = v_2(0+)$$

$$+ v_2(0^+) (1 - e^{-t}) + v_3(0^+) t = (1 - e^{-t})]$$

Odkud přímo získáme matici $\Phi(t)$

$$\bar{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & -[1 - e^{-rt}] & (1 - e^{-rt}) & e^{-rt} \end{bmatrix}$$

A tím se patří změní i tramatice $\bar{A}, \bar{C}, \bar{\Phi}$, M a N.

Pfeiffer

Blokové schéma lineárního ohředu se vzorkováním je na obr. 132. Ridiči výměnka je konstantní v_0 . Sestavte stavové rovnice a vypočítejte stavový vektor

Figure 129: Electronic circuit diagram showing a bridge rectifier connected to a load and a variable resistor R .

se spojité pracující částí

The diagram shows a feedback control system. The input signal $V_1 = V_1(t)$ enters a summing junction. The output of this junction goes through a triangle block labeled $\frac{d}{dt}$, which is connected to another summing junction. This junction also receives a feedback signal $V_2 = V_2(t)$ from a block labeled "integrator". The output of the second summing junction is fed into a rectangle block labeled "regulation of error". The output of this block is fed back through a triangle block labeled $\frac{d}{dt}$ to the first summing junction. The output of the regulation block is also fed forward through a triangle block labeled $\frac{d}{dt}$ to the second summing junction.

čase $t = 4,2T = 2,1$ s. Diagram stavových proměnných je na obr. 133. Pro sta-

$$\begin{aligned}v_1' &= 0 \\v_2' &= 0 \\v_3' &= v_2 \\v_4' &= v_3 - v_1\end{aligned}$$

Tato soustava rovníc definuje matice A

$$V_{(2,1)} = N_{(0,1)}, V_{(2)} = N_{(0,1)} \mathbf{N}^4(T) V_{(0)}$$

$$N(0,1) = \begin{bmatrix} 0,952 & 0,048 \\ 0,048 & 0,952 \end{bmatrix}$$

Dosazením a úpravou dostaňeme

$$Y(2,1) = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0556 & 0,0000 & -0,5055 & 0,4599 \\ 1,6250 & 0,0000 & 0,2550 & -0,6833 \\ 0,9375 & 0,0000 & 0,4412 & -0,4571 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_3(0) \\ v_4(0) \end{bmatrix}$$

Pro výstupní hodnotu platí

$$y(2,1) = 0,9828v_1(0) + 0,4742v_3(0) - 0,4571v_4(0)$$

J souli počítací podmínky kromě $v_2(0)$ nulové, je řešení ve stavovém prostoru zbytne komplikované, neboť k výsledku dojde daleko snáze mřitou transformace \mathcal{Z}_m . Nasledujici příklad ukazuje výhody stavového prostoru dlecko názorněji.

Příklad

V impulsových regulačních obvodech so často vystupuje šířková modulace akčních pulsů. Blokové schéma jednoho takového obvodu je na obr. 134. Regulovaná soustava má přenos

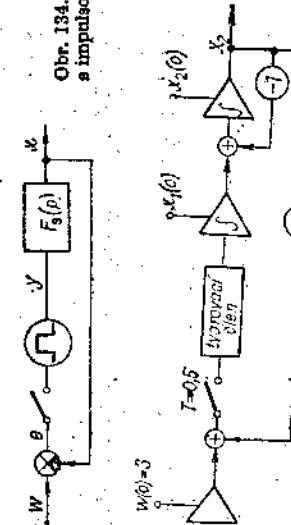
$$F_S(p) = \frac{1}{p(p+1)}$$

perioda vzorkování je $T = 0,5$ s. Trajektory člen s šířkovou modulací je popsán jednou amplitudou výstupních akčních zásahu y_0 , jednak konstantou uměrnosti k_t , která vyjadřuje délku impulsu příslušející jednotkovému vzorkovanému signálu $e(nT)$. V n-té periodě je akční veličina popsána kmitočtu vztahy

$$\begin{aligned} & \text{pro } nT \leq t < nT + a \quad \text{platí} \quad y = y_0 \operatorname{sign}(e(nT)) \\ & \text{pro } nT + a \leq t \leq (n+1)T \quad \text{platí} \quad y = 0 \end{aligned}$$

$$\text{kde } a = k_t e(nT)$$

Z uvedeného je zřejmé, že tento tvarováč má nelineární průběh, neboť čas a může dosáhnout nejrůž výšky T . Pro schéma na obr. 134 platí $y_0 = 4$, $k_t = 0,2$ s. Máme řešit odzvu na konstantní kmiti signál $w(t) = 3$. Představí podmínky soustavy jsou nulové.



Obr. 134. Blokové schéma obvodu s impulsovým šířkovým modulátorem

Diagram stavových proměnných je na obr. 135. Stavový vektor rozšířeno systému je

$$V(t) = [w; x_1; x_2; x_3]^T$$

Matici $\bar{\mathbf{A}}$ sestavíme z tříctí rovnic

$$\begin{aligned} w' &= 0 \\ x_1' &= x_3 \\ x_2' &= x_1 - x_3 \\ x_3' &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matici přechodu $\bar{\Phi}^{(m)}$ je

$$\bar{\Phi}^{(m)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & e^{-m} & e^{-m} & m - (1 - e^{-m}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vypočet je řízen výkosti $e(nT)$, pro kterou platí

$$e(nT) = [1; 0; -1; 0] V(nT)$$

Podle výkosti $e(nT)$ v $(n+1)$ periodě probíhá výpočet takto

$$V(t) = \Phi^{(m)} V(nT^+)$$

kde $m = t - nT$ a $V(nT^+)$ je vektor $V(nT)$, kde za x_3 byla dosazena hodnota $y_0 \operatorname{sign}(e(nT))$. Tento vzorec platí pro $0 \leq m \leq a_n$, kdežto pro $a_n < m \leq T$ dosadíme za $x_3 = 0$. Parametr a_n určuje rovnice

$$a_n = |e(nT)| \cdot 0,2$$

Protože $e(0) = 3$ je $a_0 = 0,6$, tedy po celou první periodu bude $x_3 = 4$

$$V(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,3935 & 0,6065 & 0,1035 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ 2 & & & \\ 0,4261 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Dále $e(T) = 3 - 0,4261 = 2,5739$ a tedy $a_1 = 0,5148$, takže opět bude po celou periodu platit $x_3 = 4$.

$$V(2T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,3935 & 0,6065 & 0,1035 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ 4 & & & \\ 0,4261 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ 4 & & & \\ 1,4714 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Nyní } e(2T) &= 3 - 1,4714 = 1,5286, \text{ tedy } a_2 = 0,3057. \text{ Pro čas } t_1 = 2T + a_2 = \\ &= 1,3057 \text{ s platí} \end{aligned}$$

$$V(t_1) = \bar{\Phi}(a_2) V(2T^+) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,3057 \\ 0 & 0,2634 & 0,7366 & 0,0123 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ 4 & & & \\ 1,4714 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ 4 & & & \\ 2,3037 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

a pro čas $t = T$

$$V(3T) = \bar{\Phi}(T - a_2) V(t_1) =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1943 \\ 0 & 0,1768 & 0,8234 & 0,0177 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & & \\ 4 & & & \\ 5,2228 & & & \\ 2,8192 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

V následující periodě je $e(3T) = 3 - 2,8192 = 0,1808$ a hodnota $a_3 = 0,0362$. Proto $t_2 = 3T + a_3 = 1,50362$

$$V(t_2) = \bar{\Phi}(a_3) V(3T^+) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,0356 & 0,9644 & 0,0006 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5,2223 \\ 2,8192 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5,3676 \\ 2,9072 \end{bmatrix}$$

a pro čas $t = 4T$ platí

$$V(4T) = \bar{\Phi}(T - a_3) V(t_2) = \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,3711 & 0,6289 & 0,0927 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5,3676 \\ 2,9072 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5,8203 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Protože hodnota odchylky $e(4T)$ je nyní záporná, bude do vektoru $V(4T^-)$ dosazena hodnota $x_3 = -4$; $a_4 = 0,1641$; $t_3 = 2,1641$

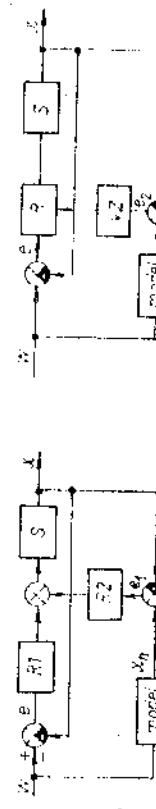
$$V(t_3) = \bar{\Phi}(a_4) V(4T^+) = \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,01513 & 0,8487 & 0,0128 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5,3676 \\ 3,8203 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4,7112 \\ 0 \end{bmatrix} = 4,0032$$

Zápis programu, který řeší danou úlohu je velmi jednoduchý a vypadá z uvedeného příkladu.

V předchozích kapitolách byly popsány různé metody pro výpočet řidicích algoritmů. Vhodné nářízením diskrétním regulátorem dosahneme velmi kvalitní řešení pochoď jak při přenosu řízení, tak při kompenzaci potřeb. Při nářízení řešení dosud vždy předpokládali znaloost parametrů regulované soustavy. V praxi je tato podmínka splňána pouze částečně. Ve většině případů matematický model, který jsme si utvářili, odpovídá skutečné soustavě pouze přibližně a navíc se parametry soustavy s časem mění. Sebelepe navržený regulátor pak ztrácí smysl, neboť jeho výpočet vychází ze špatných předpokladů. Jde tedy o řízení s použitím klasických metod regulácií techniky. Pro dosažení kvalitních výsledků je třeba hledat nové prostředky. Postupem dob bylo vypracováno mnoho různých zapojení a algoritmu, z nichž věká část byla už ověřena i v praxi. Obvykle jsou tyto systémy označovány jako adaptivní, i když výklad tohoto pojmu není u všech autorů tený. Nejčastěji označujeme jako adaptivní takový systém, u kterého se parametry struktury regulátoru přizpůsobují během provozu změnám parametrů soustavy tak, aby reguláční děj zachovával určitou kvalitu. Přitom je třeba řešit dvě úlohy: prvněm identifikaci stanovit neznámé parametry soustavy a určit optimální řidicí algoritmus pro tuto soustavu. K řešení obou dílů se obvykle používá řada složitých matematických operací, a proto se zde řídí pouze písmem uplatnění. V odborné literatuře jsou popsány různé metody a zapojení. V následujících odstavcích uvedeme několik nejčastěji používaných principů.

31. ADAPTIVNÍ ŘÍZENÍ S MODELEM

Jedno z nejjednodušších zapojení pro kompenzaci změn parametrů regulované soustavy je na obr. 136. Regulovaný ohřed tvorí regulátor R1 a soustava S. Model optimálního chování uzavřeného obvodu vytváří ideální odzvou x_n , která je porovnávána se skutečnou odzvou x . Odchylku $e_1 = x_n - x$ zpracovává regulátor R2 a působí na soustavu tak, aby skutečná odzvava systému byla blízká ideální. Zde



Obr. 136. Blokové schéma adaptivního řízení s modellem optimálního chování uzavřeného obvodu

Obr. 137. Adaptivní řízecí obvod s modellem uzavřeného obvodu

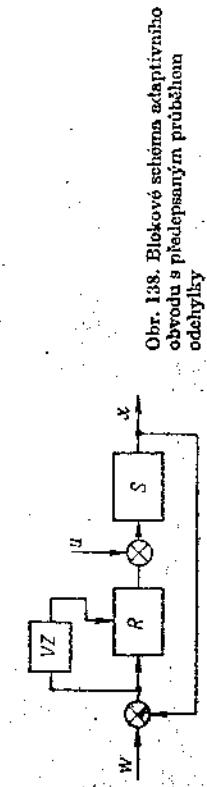
VII. ADAPTIVNÍ REGULÁTOŘI

nejde o adaptivní systém v pravém slova smyslu, pouze o úpravu snižující vliv parametrických změn v soustavě. O adaptaci můžeme mluvit tehdy, působí-li odtoky e_1 , po zpracování ve výhodnocovacím zařízení (VZ), na parametry regulačního tak, aby byly kompenzovány změny v soustavě (obr. 137).

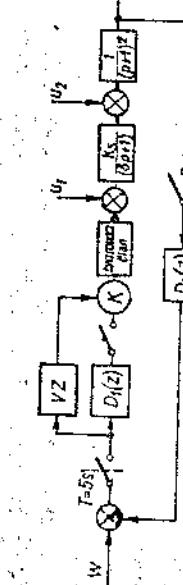
Kromě uvedených zapojení se používá i modelu otvorené snyčky. Všechna zapojení tohoto typu však scházají v případě, že na soustavu působi neměnitelná porucha.

32. SYSTÉMY S PŘEDEPSANÝM PRŮBĚHEM REGULAČNÍHO DĚJE

Tyto systémy jsou svou strukturou vlastnostní podobné systémům s možným. Obvykle se využívají časový průběh odchylky nebo akční veličiny a podle



Obr. 138. Blokové schéma adaptivního obvodu s předepsaným průběhem odchylky



Obr. 139. Blokové schéma regulačního obvodu s adaptací na změnu zesilení v regulačním obvodu

výsledků se mění parametry regulačního, popřípadě celé řídící algoritmy. Základní zapojení je na obr. 138. Systém může pracovat i při působení poruchového signálu, pokud ovšem průběh odchylky je podobný jako při změně žádatelné hodnoty $w(t)$. Jako příklad obvodu s adaptací na změnu zesilení v určitém systému, jehož blokové schéma je na obr. 139. Předpokládáme, že soustava je statická a její přenos approximuje přenosovou funkci

$$F_S(p) = \frac{K_S e^{-\Delta p}}{(rp + 1)}$$

Diskrétní přenosová funkce soustavy s tvarováním pak bude

$$F_C(z) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \cdot \frac{K_S e^{-\Delta p}}{rp + 1} = K_S \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}{1 - q_1 z^{-1}} = K_S \frac{P(z)}{Q(z)}$$

kde p_1, p_2 a q_1 jsou konstanty závislé na velikosti parametrů Δ , r a T . Řídící členy D_1 a D_2 mohou mít tuk, aby přechodný děj byl koncový a monotónní při skokovém

změně řízení i poruchy. Přenosové funkce řídících členů lindou vo tvaru (viz kap. IV, §1, 19)

$$D_1(z) := \frac{1}{(p_1 + p_2)(1 - z^{-1})}$$

$$D_2(z) = \frac{p_1 + p_2}{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}} [1 - (1 - z^{-1})(1 - q_1 z^{-1})]$$

Přiblžně změn akční veličiny $\Delta y(nT) = y(nT) - y[(n-1)T]$ určuje tyto rovnice: při skokovém změně řízení w_0

$$\bar{Y}_w(z) = (1 - z^{-1}) Y_w(z) = \frac{w_0}{p_1 + p_2} (1 - q_1 z^{-1})$$

při působení konstantního poruchy w_0

$$\bar{Y}_u(z) = (1 - z^{-1}) Y_u(z) = -u_0 [(1 + q_1) z^{-1} - q_1 z^{-2}]$$

Z téhoto rovnice plyne, že poměr amplitud dvou po sobě následujících změn akčních zásahu je

$$d_w = q_1 = -e^{-T}$$

při změně řízení, a

$$d_u = -\frac{q_1}{1 + q_1} = -\frac{e^{-T}}{1 + e^{-T}}$$

při působení poruchy. Protože ve většině případů platí $e^{-T} \ll 1$, je průběh akční veličiny (tedy i odchylky) v obou případech podobný. To vše ovšem platí za předpokladu, že v čase $t < 0$ byl systém v klidu (nulové počáteční podmínky). Tento předpoklad není ovšem v praxi nikdy splněn, ale lze se mu přiblížit podmínkou, že vzniklá odchylka je alespoň včasné odchylky v posledních dvanáctech časových vzorkování. Závislost poměru dvou po sobě následujících změn akčních zásahů na zesilení soustavy K_S určuje vztah

$$d = \frac{\bar{Y}(T)}{\bar{Y}(0)} = 1 - K_S(1 + q_1) \quad (95)$$

z kterého lze snadno vypočítat skutečnou velikost zesilení. Ve výhodnocovacím zařízení (podle obr. 139) tedy nejdříve dojde k rozložení, zda současná odchylka $e(t)$ je nadová větší než předchozí (tj. $e(-T)$ a $e(-2T)$). Jestliže ano, jsou zaznamenané hodnoty změn akční větší $y(t)$ a $y(T)$ a z rovnice (95) je vypočítána okamžitá hodnota zesilení soustavy K_S . Zesilens v přímém výstuvi K je pak nastaveno tak, aby byla správná podmínka

Uvedený algoritmus adaptace je velmi jednoduchý a pracuje přesně pouze při změně zásadní soustavy. Jak ukazuje výsledky ziskané simulací na číslovoých a hydraulických počítačích, adaptacní proces probíhá velmi rychle a přesně vzhledem i v případě, že poruchový signál působí v jiném místě, než bylo předpokládáno. Na

obr. 140, 141 jsou nakresleny odezvy systému na řízení a poruchový signál u_1 vstupující na vstupu soustavy. Přenos soustavy je

$$F_S(p) = \frac{K_S}{(6p+1)(p+1)^2}$$

perioda vzorkování je 5 s. Aproximační přenos je zvolen ve tvaru

$$F_S(p) = \frac{K_S e^{-1.5p}}{7p+1}$$

Zaznamenané průběhy odpovídají těmto velikostem zeslání soustavy: křivka a: $K_S = 1$, křivka b: $K_S = 1.5$, křivka c: $K_S = 0.5$. Na obr. 142 jsou zaznamenané odezvy na poruchový signál u_2 , jehož přenos na výstup soustavy je

$$F_U(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$$

I v tomto případě adaptace zlepšuje výrazně dynamické vlastnosti obvodu. Pro použití v praxi by však bylo třeba tento algoritmus ještě doplnit dalším využitím obvodu, neboť různých uvedených uvádějí platí v případě, že porucha začala působit v okamžiku vzorkování.

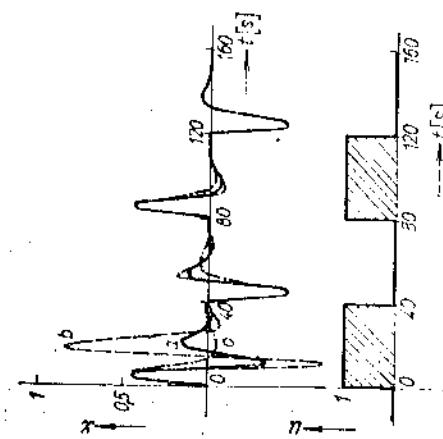
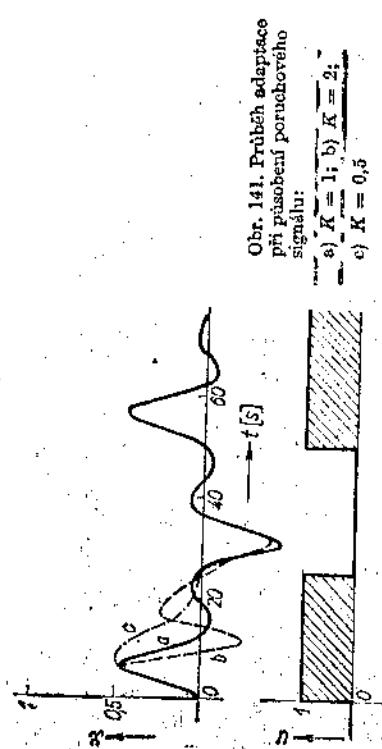
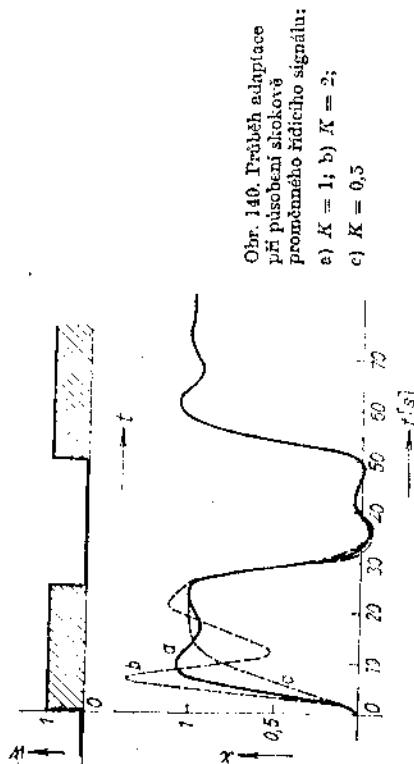
33. ADAPTIVNÍ SYSTÉMY S PRŮBĚŽNOU IDENTIFIKACÍ PARAMETRŮ SOUSTAVY

Skutečné adaptivní řízení je možné jedině tehdy, známe-li okamžité hodnoty parametrů regulované soustavy, K jejich výpočtu slouží různé metody průběžně prováděné identifikace. Protože všechny soustavy v provozu jsou vystaveny písacími poruchovými signály, je třeba, aby ponížila identifikační metoda vliv těchto poruch eliminovala. Běžně známé jsou metody statistické dynamiky. Pomocí korelačních funkcí stanovujeme ráhové funkce (impulsové odemy) jednotlivých členů obvodu a z nich usuzujeme na konkretní tvary přenosových funkcí. Většina těchto postupů operuje s velkým množstvím dat a využívá velkokapacitní paměti a kvalitní výpočetní techniku. S nástupem minipočtačů a mikropočesorií v řadě těchnic byly vypracovány metody, které i při omezených možnostech počítání dorohují vypořádat hodnoty parametrů regulované soustavy s dosaženou přesností. K popisu tétoho algoritmu se poněkud věnujeme výpočetním prostorům (viz kap. VI). Pro ilustraci zde uvedeme dva algoritmy, které se již osvědčily i při aplikacích v praxi. Předpokládejme, že hledaný diskrétní přenos identifikované soustavy s tvarováním má tvar

$$F_C(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Jde tedy o soustavu s jedním vstupem a jedním výstupem, která neobsahuje doopravní zpoždění řešení, než je perioda vzorkování. Ukolem identifikace je určit parametry b_k a a_k . Z uvedeného přenosu vyplývá diferenční rovnice

$$y(t) = -\sum_{k=1}^n a_k y(t-k) + \sum_{k=1}^n b_k u(t-k) \quad (96)$$



Pro zjednodušení značení zde předpokládáme normovaný čas $T = 1$. Zavedeme souběžné vektory \mathbf{B} a \mathbf{X} , pro které platí

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} := [a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n]^T$$

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

(symbol T zde značí transponování vektor)

$$\mathbf{X}(t) = [-y(t-1), -y(t-2), \dots, -y(t-n), u(t-1), u(t-2), \dots, u(t-n)]^T$$

Rovnice (96) pak písemně ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{X}^T(t) \mathbf{B}$$

Předpokládáme, že na začátku existuje určitý odhad koeficientů $\mathbf{B}(0)$ a do počítadla přichází naměřené hodnoty vzdálen $y(i)$ a $u(i)$. Uložen je vypočítat v čase $(\tau+1)$ nový odhad parametrů $\mathbf{B}(\tau+1)$ na základě předcházejícího odhadu $\mathbf{B}(\tau)$ a nové hodnoty $y(\tau+1)$. Tento nový odhad vypočítáme z rovnice

$$\mathbf{B}(\tau+1) = \mathbf{B}(\tau) + \frac{y(\tau+1) - \mathbf{X}^T(\tau+1) \mathbf{B}(\tau)}{\mathbf{X}^T(\tau+1) \mathbf{X}(\tau+1)} \mathbf{X}(\tau+1) \quad (97)$$

V této rovnici mají jednotlivé výrazy tento syntetický význam:
 $\mathbf{B}(\tau+1)$ nový odhad vektorního soustavy,

$\mathbf{B}(\tau)$ předcházející odhad koeficientů soustavy,

$\mathbf{X}^T(\tau+1) \mathbf{X}(\tau+1)$ hodnota výstupu soustavy v čase $(\tau+1)$, vypočítaná na základě předchozího odhadu,

$y(\tau+1) - \mathbf{X}^T(\tau+1) \mathbf{B}(\tau)$ rozdíl skutečné (naměřené) hodnoty výstupu v čase $\tau+1$ a hodnoty vypočítané na základě předcházejícího odhadu,

$\mathbf{X}^T(\tau+1) \mathbf{X}(\tau+1)$ druhé mocninu absolutní hodnoty vektoru \mathbf{X} v čase $t = \tau + 1$.
 Podle rovnice (97) je oprava odhadu v každém kroku dáná násobkem chyb v odhadu a vektoru $\mathbf{X}(\tau+1)$, dělenou druhou mocninou velikosti tohoto vektoru

$$\Delta \mathbf{B}(\tau+1) = \mathbf{B}(\tau+1) - \mathbf{B}(\tau) = c \mathbf{X}(\tau+1)$$

$$c := \frac{y(\tau+1) - \mathbf{X}^T(\tau+1) \mathbf{B}(\tau)}{\mathbf{X}^T(\tau+1) \mathbf{X}(\tau+1)}$$

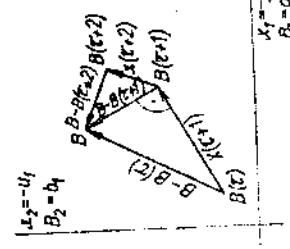
Geometrická interpretace tohoto vztahu ukazuje názorně funkci algoritmu. Vektory $\mathbf{X}(\tau)$ chápeme jako vektory n -rozměrného prostoru a $\mathbf{B}(\tau)$ jako body tohoto prostoru. Pro $n = 2$ lze postup adaptace sledovat v rovině (obr. 143). Smečená hodnota parametrů a_1 a b_1 je určena polohou bodu \mathbf{B} . První odhad je $\mathbf{B}(t)$. Bod $\mathbf{B}(\tau+1)$ konstruujeme tak, že vedené přímkou v směru vektora $\mathbf{X}(\tau+1)$ a na této přímce najdeme bod, nejblíže bodu \mathbf{B} . Tato konstrukce je správná teď, jestliže vektory $\mathbf{X}(\tau+1)$ a $\mathbf{B} - \mathbf{B}(\tau+1)$ kolmé neboli je-li jejich skalární součin roven nule.

Platnost této rovnice plyne přímo z rovnice (97).

Identifikace pomocí tohoto algoritmu je monotoná, což znamená, že platí

$$|\mathbf{B} - \mathbf{B}(\tau+1)| \leq |\mathbf{B} - \mathbf{B}(\tau)|$$

Velikost chyb v odhadu se s časem normále zvětšovat. Tvoří-li poslopnost vektorů $\mathbf{X}(1), \mathbf{X}(2), \dots, \mathbf{X}(n)$ systém ortogonálních vektorů, pak je přesné identifikaci státi n kroků. Obecně platí, že rychlosť konvergence algoritmu závisí na správnosti počítáního odhadu a na tom, jak jsou rozdílné vektory $\mathbf{X}(\tau)$. Rychlosť konvergence je zvláště důležitá tehdy, měnila se parametry soustavy s časem. Identifikace je pak úspěšná pouze tehdy, je-li proces konvergence mnohem rychlejší než rychlosť změn parametrů soustavy.



Obr. 143. Znázornění elipsoidu průběhu identifikace parametrů soustavy

Popsaný algoritmus lze použít i tehdy, působí-li na soustavu poruchový signál (sum). Úroveň šumu však nesmí být příliš vysoká, nebo alespoň jeho změny nesmí probíhat rychlostí srovnatelnou s reakcí dobon regulované soustavy. To vyplývá z následující úvahy. Celém řízení je spináni podmínky

$$|y(\tau+1) - w(\tau)| \leq \epsilon \quad (98)$$

kde $w(\tau)$ je žádaná hodnota v čase τ a s je daná povolená chyba regulače. Z této podmínky lze určit hodnotu řízení $v(\tau)$ tak, aby v čase $\tau+1$ byla nerovnost (98) splněna. K tomu stačí dosadit do rovnice (96) odhadky koeficientů a a b . Pak platí

$$u(\tau) = \frac{1}{b_1} \left[\sum_{k=1}^n a_{k1} (v(\tau-k+1) - \sum_{k=1}^n b_{k1} u(\tau-k+1)) + w(\tau) \right] \quad (99)$$

Pro výstupní hodnotu v čase $\tau+1$ pak platí

$$y(\tau+1) = v(\tau) + \eta(\tau)$$

Velikost chyby řízení $\eta(\tau)$ závisí jednak na velikosti působidlo rušivého signálu, jednak na přesnosti v odhadu koeficientů soustavy $\mathbf{B}(\tau)$. Je zřejmě, že cíl řízení, využívaný novorost (98) ke splnit pouze tehdy, platí-li

$$|\eta(\tau)| < \epsilon$$

Zde je třeba též upozornit na souvisejnost zvoleného algoritmu řízení (98), popř. (99), s řidicími algoritmy popsanými v kap. IV. Platí-li $y(\tau+1) = w(\tau)$, znamená to, že přenosová funkce uzavřeného ohvodu pro řízení je

$$F_W(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = z^{-1}$$

úměrnýní tvář pro vstupní signál typu silueta. Používáme ho pro množství požadavky

na řízení, které odpovídají složitějším řídicím algoritům uvedeným v kap. IV.
Tak např. pro typ

$$F_W(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = 2z^{-1} - z^{-2}$$

dostaneme

$$y(\tau + 1) = 2w(\tau) - w(\tau - 1)$$

Hodnotu potřebného většiny $w(\tau)$ vypočítáme opět dosazením do rovnice (99).

Pro systém s velkou počáteční nejrčitostí se používá poněkud upravený algoritmus. V tomto případě stačí, známe-li alespoň hodnotu sign b_1 a velikost b_m , pro kterou platí $|b_1| \leq b_m$. Algoritmus pro výpočet nového odsahu parametrů soustavy popisuje rovnice

$$B(\tau) = B(\tau - 1) - r(\tau) \nabla F[y(\tau) - w(\tau)] \quad (100)$$

Oznáčme $e(\tau) = y(\tau) - w(\tau)$ a funkci F definujeme takto

$$F[e(\tau)] = 0 \quad \text{pro } |e(\tau)| < \varepsilon$$

$$F[e(\tau)] = [e(\tau)]^3 \quad \text{pro } |e(\tau)| \geq \varepsilon$$

Gradient funkce F je dán vztahem

$$\nabla F[e(\tau)] = 2e(\tau) b_1 X(\tau - 1) \quad \text{pro } |e(\tau)| \geq \varepsilon$$

Funkce $r(\tau)$ zvolíme ve tvaru

$$r(\tau) = \frac{1}{2} (1 - \varrho) b_1^{-1} [X(\tau - 1), X(\tau - 1)]^{-1}$$

Kde pro číslo $\varrho < 1$ platí

$$|\varphi(\tau)| \leq \varrho \varepsilon$$

Protože neznáme velikost koeficientu b_1 , ale pouze jeho maximální velikost a znaménko, použijeme náhrady

$$b_1 = b_m \text{ sign } b_1$$

Adaptaci algoritmu pak definují rovnice

$$B(\tau) = B(\tau - 1) \quad \text{pro } |e(\tau)| < \varepsilon$$

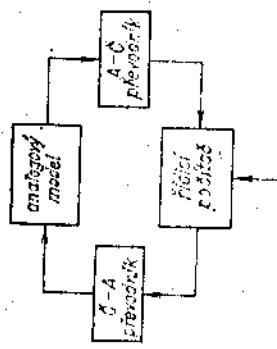
$$B(\tau) = B(\tau - 1) - (1 - \varrho) e(\tau) X(\tau - 1), X(\tau - 1)]^{-1}, \quad \text{pro } |e(\tau)| > \varepsilon$$

$$\frac{1}{b_m} \text{ sign } b_1 \quad \text{pro } |e(\tau)| > \varepsilon$$

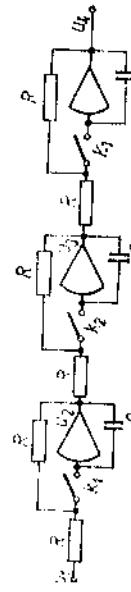
Podrobnější studium tétoho algoritmu ukazuje, že rychlost konvergence závisí především na tom, zda byl správně odhadnut typ přenosové funkce, tj. řídil soustavy. V odborné literatuře jsou různé popisy i takové algoritmy, které do značné míry tolerují chybky odsahu i v této oblasti.

VIII. MODELOVÁNÍ A SIMULACE SYSTÉMŮ SE VZORKOVÁNÍM

34. MODELOVÁNÍ JEDNODUCHÝCH SYSTÉMU
NA ANALOGOVÉM POČÍTAČI
- Narizené řídicí algoritmy je vhodné před nasazením ve skutečném průzoru orientovat modelováním. Na rozdíl od modelování spojitych procesů je zde třeba modelovat diskrétní obvody číslicového řídicího počítače. Skutečný podmínkou nejvíce odpovídá spojení analogového a číslicového počítače (obr. 144). Rídící počítač je se vstupními a výstupními převodníky propojen ve skutečných podmínkách a spolehlivý řízený proces je modelován na analogovém modelu. Tento způsob je sice nejvěrnější, vyzaduje však značně nákladné zařízení. Samotné převodníky dnes před-



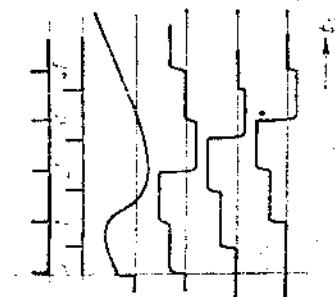
Obr. 144. Sposojení analogového a číslicového počítače pro modelování vstupních a výstupních podmínek řídicího počítače. Z tohoto hlediska je jejich použití pro modelování obvodů s řídícími počítači na úrovni klasických analogových počítačů, i když restavérne logické prvky práci mohou byt usnadni.



Obr. 145. Schéma modelu článku se zpožděním o jednu periodu vzorkování

(např. MEDA 41 TC, americký EA 680) mají číslicovou část velmi omezenou a nemnoží vytvoření potřebných obvodů aritmatické části. Z tohoto hlediska je jejich použití pro modelování obvodů s řídícími počítači na úrovni klasických analogových počítačů, i když restavérne logické prvky práci mohou byt usnadni.

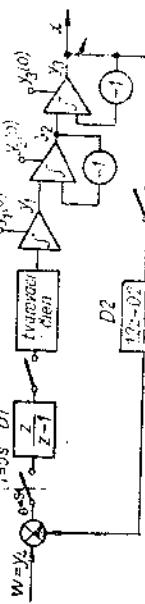
Jednoduchší systémy lze modelovat na analogových počítačích, které jsou méně nákladné, a proto dostupnější. Ústřední algoritmus modelování pomocí zpoždovaček členů, jejichž schéma je na obr. 145. Je-li kontakt ve vstupní větví zesilovače srovnut, má článek (zesilovač se zpětnou vazbou) vlastnosti sekvantního člena a číslovou konstantou $r = RU$. V rozepnutém stavu se zesilovač chová jako integrátor a zvláště pro technické pracovníky je výhodná fyzikální realizace všech sledovacích veličin.



Obr. 145. Graf napětí v zapojení pedálu

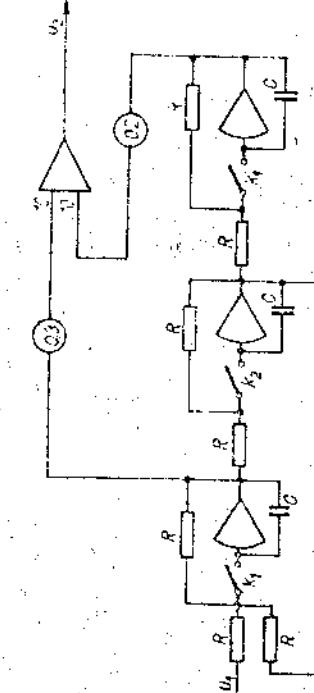
Popsaný způsob je zatížen vždy určitou chybou, která vzniká v důsledku koncnečné doby srovnání kontaktní k_1 . Tato doba musí být tak dlouhá, aby přechodový dej se sekvantním členem byl忽略něn, tedy nejméně $h \geq 3r$. Naproti tomu doba srovnání musí být zanedbatelná vzhledem k periodě vzorkování $h < 0,01T$. Z toho vyplývá i značná omezení použitelnosti této modeli. Naproti tomu je výhodná fyzikální realizace všech sledovacích veličin.

Potřebu modelovat složitější systémy řízení si využití široké rozpracování metod a speciálních programovacích jazyků pro simulaci dynamických procesů na číslicových počítačích. Základem každé takové metody je všechna číslicová integrace.



Obr. 146. Blokové schéma regulačního obvodu, založené pomocí simuláciího jazyka na číslicovém počítači.

s odpojeným vstupem a záchovou na výstupu konstantní hodnotou. Každý zesilovač tedy modeluje výkonovou čin s tvarovacím nulteho řádu. Zapojujeme-li zde sebo obecný, jijichž kontakty spínají střídavě v okamžicích vzorkování a v polovinách periody vzorkování, získáme způsob o jednu periodu vzorkování T . Názorně to ukazuje časový průběh jednotlivých napěti na obr. 146. Kontakty k_1 spínají v čas-



Program pro číslicovou simulaci regulačního děje v obvodu
podle obr. 148

```
TEXT (OBVOD SE DIVIEM REGULATORY)
    END * POPIS *
START.
Y4:=0.5+0.5?SIGN(0.07854?T+0.0001)*
S1:=Y4-DIGIT(2)*
D1:DIGIT(S1,5,2)*
Y1:INT(DIGIT(1))*
Y2:INT(Y1-Y2)*
Y3:INT(Y2-Y3)*
D2:DIGIT(Y3,5,2)*
VYSTUP(T,Y3,Y2,S1)*
GOTO START * MONOPRIS * END * FINISH *
```

Příkazů podávající a definující časový interval

```
Y1(0)=0
Y2(0)=0
Y3(0)=0
H=0.05
X MIN=0
X MAX=100
DELTA=0.5
```